3. cvičení z Matematické analýzy 2

3. - 7. října 2022

Užitečná poznámka: Platí: $\lim\limits_{a\to a_0} f(a) = c \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{a\to a_0} |f(a)-c| = 0$.

A dále

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x+x_0, y+y_0)$$

tedy limitu v libovolném bodě můžeme vždy převést na limitu v $(0,0)$ pro transformovanou funkci (ale v příkladech se tento převod využívá jen zřídka).

3.1 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\mathrm{tg}(xy)}{y}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y}{y^2+x}$ je

$$D(f): \quad x \neq -y^2 \; .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f už snadno vidíme, že na parabole $x=-y^2$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0,0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = x^2+y$ a $g(x,y) = y^2+x$ jsou spojité funkce
- položme $M: \; x=-y^2 \;\wedge\; (x,y)\neq(0,0)$
- pro každé $a\in M$ je $g(a)=0$ a $h(a)\neq 0$
- $a_0=(0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0=(0,0)$ po přímce $y=kx$, kde $k\in\mathbb{R}$. Pro $x\to 0$ máme $(x,kx)\to(0,0)$. Takže nás zajímá

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2+kx}{k^2x^2+x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+k}{k^2x+1} = k \; .$$

I z tohoto výsledku už vidíme, že limita závisí na přiblížení. Takže i toto nám ukazuje, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$ prostě neexistuje.

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{xy}{|x|+|y|}$ je

$$D(f):\quad (x,y)\neq(0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemáme tudíž možnost použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatel). Zde vidíme, jak důležité pro další úvahy je určit si definiční obor funkce.

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli by (bez absolutních hodnot) byla vlastně polynomem se stupněm 1. Na druhé straně v čitateli je zase polynom se stupněm 2, který by nejspíš měl převážit jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si to na nějakém přiblížení, např. po ose x (tj. při $y=0$):

$$\lim_{x\to0}f(x,0)=\lim_{x\to0}0=0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c=0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je. Použijeme přitom tyto odhady:

$$|x|,|y|\leq\underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\|(x,y)-(0,0)\|}\leq|x|+|y|$$

Pro $(x,y)\neq(0,0)$ tak dostaneme

$$0\leq\Big|f(x,y)-\underbrace{c}_{=0}\Big|=\frac{|x|\cdot|y|}{|x|+|y|}\leq\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{|x|+|y|}\leq\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{x^2+y^2}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}0\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\big|f(x,y)-c\big|\leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=c=0$.

Obecnější způsob: Existenci limity $\lim\limits_{a\to a_0}f(a)=c$ ještě můžeme ukázat pomocí její definice. Má tedy platit, že

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall a\in D(f)\quad 0<\|a-a_0\|<\delta\ \Rightarrow\ |f(a)-c|<\varepsilon\,.$$

Opět použijeme stejný odhad pro $c=0$:

$$\big|f(x,y)-c\big|=\big|f(x,y)\big|\leq\cdots\leq\sqrt{x^2+y^2}=\|(x,y)-(0,0)\|$$

Pro $\varepsilon>0$ teď stačí vzít $\delta:=\varepsilon$ a pak pro $a_0=(0,0)$ a $a=(x,y)$ takové, že $0<\|a-a_0\|<\delta$ určitě máme, že

$$|f(a)-0|\leq\cdots\leq\|a-a_0\|<\delta=\varepsilon\,.$$

- -

(c) Definiční obor funkce $f(x,y)=\frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$ je

$$D(f):\quad xy\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\quad\wedge\quad y\neq0.$$

Bod $a_0 := (4,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Protože nás zajímá $(x,y) \to (4,0)$, tak hodnoty x v nějakém okolí bodu $(4,0)$ jsou nenulové. Proto (pro body z $D(f)$ v nějakém okolí a_0) můžeme psát

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} \cdot x$$

což jsme takto udělali proto, abychom mohli vyšetřit $\lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} \underbrace{\frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy}}_{=F(x,y)}$ pomocí věty o limitě složené funkce. Ta nám říká, že pokud

- $F(x,y) = h(g(x,y))$, kde $g(x,y) = xy$ a $h(z) = \frac{\operatorname{tg}(z)}{z}$.
- $\lim\limits_{(x,y)\to a_0} g(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(4,0)} xy = 0 \ (=: b_0)$ (neboť g je součin spojitých funkcí)
- $\lim\limits_{z\to b_0} h(z) = \lim\limits_{z\to 0} \underbrace{\frac{\sin(z)}{z}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos(z)}}_{\to 1} = 1 \ (=: c)$
- a pokud (pro korektní použití) máme ještě zajištěno,
  - ∗ že buď v prstencovém okolí $P_\varepsilon(a_0)$ bodu $a_0 = (4,0)$ je $g(a) \neq b_0$ pro $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)$ (což snadno zajistíme tím, že omezíme definiční obor funkce g z celého $\mathbb{R}^2$ jen na $D(g) : y \neq 0$, a i potom stále ještě budeme mít $D(g) \supseteq D(F)$)
  - ∗ nebo že funkce h je spojitá v $b_0 = 0$ (což zajistíme tím, že funkci h spojitě dodefinujeme v $b_0 = 0$).

pak $\lim\limits_{(x,y)\to a_0} F(x,y) = c$.

Zjistili jsme tedy, že

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy} = 1$$

a tudíž

$$\lim_{(x,y)\to(4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(4,0)} \underbrace{\frac{\operatorname{tg}(xy)}{xy}}_{\to 1} \cdot \underbrace{x}_{\to 4} = 4\ .$$

3.2 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{4(x-1)^2+3y^2}{|x-1|+y}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{4(x-1)^2+3y^2}{|x-1|+y}$ je

$$D(f): \quad y \neq -|x-1|$$

což znamená, že z roviny musíme vyjmout graf funkce ve tvaru absolutní hodnoty. Bod $(1,0)$ je evidentně hromadným bodem $D(f)$. V limitě se čitatel i jmenovatel blíží k nule. Můžeme zkusit přiblížení po přímkách procházejících tímto bodem, které budou tvaru $y = k(x-1)$, kde $k \neq \pm 1$. Zjistíme, že všechny dávají limitu 0.

Přesto ale (konečná) limita *neexistuje*. K tomu stačí použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = 4(x-1)^2 + 3y^2$ a $g(x,y) = |x-1| + y$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ y = -|x-1| \ \wedge \ (x,y) \neq (1,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (1,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y)$.

A protože už z alespoň jednoho přiblížení máme hodnotu 0, tak ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat.

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemáme tudíž možnost použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatel).

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli je polynomem se stupněm 2, funkce v čitateli je zase polynom se stupněm 3, který by měl převážit jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je a to (opět) pomocí odhadu:

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \left| f(x,y) - \underbrace{c}_{=0} \right| = \frac{|x|^2 \cdot |y|}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| f(x,y) - c \right| \ \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} \ = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (polynom, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme ještě použít odhad pomocí polárních souřadnic (který ale vlastně nepřináší v tomto případě nic nového): body (x,y) v okolí $a_0 = (0,0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho \cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho \sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \le \left|f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - \underbrace{c}_{=0}\right| = \frac{|\varrho\sin\varphi|^2 \cdot |\varrho\cos\varphi|}{\varrho^2} = \varrho \cdot \underbrace{|\sin\varphi|^2}_{\le 1} \cdot \underbrace{|\cos\varphi|}_{\le 1} \le \varrho =: g(\varrho)$$

Nyní, protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = 0$ vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

- -

(c) Pro funkci $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^{x^2y^2\ln(x^2+y^2)}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

Stačí tedy zjistit $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$. Zkusíme si přiblížení, např. po ose x (tj. při $y=0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Ze zkušenosti s limitami můžeme už tušit, že limita bude existovat. Použijeme odhad:

$$|x|, |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

a z něj máme

$$0 \le \left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right| \le (x^2+y^2)^2 \cdot \left|\ln(x^2+y^2)\right|.$$

Použitím věty o limitě složené funkce pro předpoklady

- $g(x,y) = x^2+y^2$ a $h(z) = z^2\ln z$
- $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 \ (= b_0)$
- $\lim\limits_{z\to(b_0)_+} h(z) = \lim\limits_{z\to 0_+} z^2\ln z = 0 \overset{\text{L'Hospital}}{\Longleftarrow} \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{(\ln z)'}{(z^{-2})'} = \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{z^{-1}}{-2z^{-3}} = \lim\limits_{z\to 0_+} \frac{z^2}{-2} = 0$
- v prstencovém okolí bodu $(0,0)$ je $g(x,y) \ne b_0$

dostáváme

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^2\ln(x^2+y^2) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(g(x,y)) = 0.$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \ \le \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right| \ \le \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|(x^2+y^2)^2 \cdot \ln(x^2+y^2)\right| \ = 0$$

tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0$$

a konečně pak

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = e^0 = 1.$$

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme opět použít odhad pomocí polárních souřadnic (ale ani zde nedostaneme nic nového): body (x,y) v okolí $a_0 = (0,0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho\cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho\sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \le \left|x^2y^2\ln(x^2+y^2)\right| = \varrho^4\cos^2\varphi\sin^2\varphi\ln(\varrho^2) \le \varrho^4\ln(\varrho^2) =: g(\varrho)$$

A protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = \lim\limits_{\varrho\to 0_+} 2\varrho^4\ln\varrho = 0$ (viz výše) vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2y^2\ln(x^2+y^2) = 0\ .$$

A zbytek by byl stejný.

3.3 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,1)} \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Řešení:
(a) Pro funkci $f(x,y,z) = \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$ je její definiční obor

$$D_f : \quad xyz \neq 1$$

a bod $(1,1,1)$ je tedy hromadným bodem D_f. Stupně polynomů v čitateli i jmenovateli jsou stejné, takže spíš zkusíme, jestli limita vůbec existuje.

Zúžením f na přímku $(x,y,z) = (t,t,t)$, kde $1 \neq t \in \mathbb{R}$ (tj. bez bodu $(1,1,1)$) dostáváme $f(t,t,t) = \frac{t^3-t^3}{t^3-1} = 0$, takže

$$\lim_{t\to1} f(t,t,t) = \lim_{t\to1} 0 = 0 \ .$$

Na druhou stranu zúžením f na přímku $(x,y,z) = (1,1,t)$, kde $1 \neq t \in \mathbb{R}$ (opět bez bodu $(1,1,1)$) dostáváme $f(1,1,t) = \frac{t^2-t}{t-1} = t$, takže

$$\lim_{t\to1} f(1,1,t) = \lim_{t\to1} t = 1 \ .$$

Původní limita tedy NEEXISTUJE.

Můžeme také použít kritérium pro neexistenci limity:

- $f(x,y,z) = \frac{h(x,y,z)}{g(x,y,z)}$, kde $h(x,y,z) = (xz-y^2)z$ a $g(x,y,z) = xyz-1$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ xyz = 1 \ \wedge \ y \neq 1$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (1,1,1)$ je hromadný bod množiny M

Pak (konečná) limita $\lim\limits_{a\to a_0} f(a)$ neexistuje.

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{|x|^3+|y|^3}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemůžeme tedy použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatel).

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli je polynomem se stupněm $2+2=4$, funkce v čitateli je sice není přímo polynom, ale chová se podobně jako polynom stupně 3. Tušíme tedy, že by čitatel převáží jmenovatele a limita by mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si proto nejdříve nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y=0$):

$$\lim_{x\to0} f(x,0) = \lim_{x\to0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je skutečně $c = 0$. Teď ukážeme, že to limita je. K tomu stačí odhadnout funkci f jakoukoliv vhodnou funkci, která má za limitu nulu. Vzhledem k čitateli v f se bude hodit tento jednoduchý odhad:

$$|x|, |y| \leq \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$$

Pro $(x, y) \neq (0, 0)$ tak dostaneme

$$0 \leq \left| f(x, y) - \underbrace{c}_{=0} \right| = \frac{|x|^2 |y|^2}{|x|^3 + |y|^3} \leq \frac{\left(\sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}\right)^4}{|x|^3 + |y|^3} = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \quad \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| f(x, y) - c \right| \quad \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3} \quad = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x, y) = \sqrt[3]{|x|^3 + |y|^3}$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (abs. hodnota, polynom, odmocnina).

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = c = 0$.

Poznámka: Kromě eukleidovské normy existuji i jiné, tzv. p-normy pro $p \geq 1$ definované jako

$$\|\vec{v}\|_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$$

pro $\vec{v} = (x_1, \ldots, x_n)$, a dokonce i ∞-norma, která je definovaná jako

$$\|\vec{v}\|_\infty := \lim_{p\to\infty} \|\vec{v}\|_p = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} .$$

Všechny tyto normy jsou souměřitelné v tomto smyslu:
Pro libovolné $p, q \in \langle 1, \infty\rangle$ existuje $K > 0$ takové, že pro všechna $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ platí $\|\vec{v}\|_p \leq K \cdot \|\vec{v}\|_q$.

- -

(c) Pro funkci $f(x, y) = \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ je její definiční obor

$$D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Zkusíme si přiblížení, např. po ose x (tj. při $y = 0$):

$$\lim_{x\to0} f(x, 0) = \lim_{x\to0} \frac{1}{x^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = \left\{ \begin{matrix} \mathit{substituce} \\ s = \frac{1}{x^2} \end{matrix} \right\} = \lim_{s\to+\infty} \frac{s^2}{e^s} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{s\to+\infty} \frac{2s}{e^s} \overset{\text{L'Hosp.}}{=} \lim_{s\to+\infty} \frac{2}{e^s} = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c = 0$. Ze zkušenosti s limitami můžeme už tušit, že limita bude existovat. Odhad by zde bylo obtížné použít, zkusíme proto polární souřadnice:

Body (x, y) v okolí $a_0 = (0, 0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho \cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho \sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \leq |f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - c| = \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\varrho^2}}}{\varrho^4}$$

Nyní bychom chtěli tento výraz odhadnout nějakou funkcí $g(\varrho)$ nezávisející na úhlu, která pro ϱ jdoucí k nule má limitu nula. Potřebujeme tedy omezit hodnotu $\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi}$ konstantou. Protože funkce $h(\varphi) = \cos^4\varphi + \sin^4\varphi$ je spojitá a kladná na intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$, tak zde také nabývá svého kladného minima ε v nějakém bodě $\varphi_0 \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Tedy $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi \geq \varepsilon > 0$. A proto je $\frac{1}{\cos^4\varphi+\sin^4\varphi} \leq \frac{1}{\varepsilon}$ a my máme odhad

$$0 \leq |f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - c| = \frac{1}{\cos^4\varphi + \sin^4\varphi} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\varrho^2}}}{\varrho^4} \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\varrho^2}}}{\varrho^4} =: g(\varrho)$$

A protože (jak už jsme spočítali) $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = \lim\limits_{\varrho\to 0_+} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{\varrho^2}}}{\varrho^4} = 0$ (viz výše) vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = c = 0 \ .$$

3.4 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+2y^2}$,

(c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ je

$$D(f): \quad y^3 \neq -x^2 \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Z tvaru funkce f snadno vidíme, že na křivce $y = -\sqrt[3]{x^2}$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0,0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x,y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x,y) = x^2y^2$ a $g(x,y) = x^2+y^3$ jsou spojité funkce
- položme $M: \ y = -\sqrt[3]{x^2} \ \wedge \ (x,y) \neq (0,0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0,0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ máme $(x,kx) \to (0,0)$. Takže dostaneme

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^4}{x^2+k^3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{k^2x^2}{1+k^3x} = 0 \ .$$

Proto ani "nekonečná" limita neexistuje.

Celkově máme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^3}$ neexistuje.

(b) Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2+2y^2}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Nemůžeme tedy použít kritérium pro neexistenci limity (nemáme totiž dost velkou množinu, co by vynulovala jmenovatele).

Co teď dál? Funkce ve jmenovateli je polynomem se stupněm 2, funkce v čitateli je zase polynom se stupněm $2+2=4$, který by měl převážit jmenovatele. Tušíme tedy, že by limita mohla existovat (a být nulová).

Zkusíme si nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y=0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Tedy jediný kandidát na limitu je $c=0$. Teď ukážeme, že to skutečně limita je a to pomocí odhadu:

$$|x|, |y| \le \sqrt{x^2+y^2}$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ tak dostaneme

$$0 \le \left|f(x,y) - \underbrace{c}_{=0}\right| = \frac{|x|^2 \cdot |y|^2}{x^2+2y^2} \le \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}{x^2+2y^2} \le \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \;\le\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|f(x,y)-c\right| \;\le\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 \;=0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = x^2+y^2$ je spojitá, protože je to polynom.

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

(c) Definiční obor funkce $f(x,y) = (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$ je

$$D(f): \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0.$$

Máme zde případ, kdy omezená funkce je násobena funkcí, která má limitu nula. Stačí tedy použít odhad pro $(x,y) \in D(f)$:

$$0 \le \left|f(x,y)\right| = |x+y| \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right|}_{\le 1} \cdot \underbrace{\left|\sin\left(\tfrac{1}{y}\right)\right|}_{\le 1} \le |x+y|$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \;\le\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|f(x,y)\right| \;\le\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x+y| \;=0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = |x+y|$ je spojitá, protože je to složení spojitých funkcí (abs. hodnota, polynom).

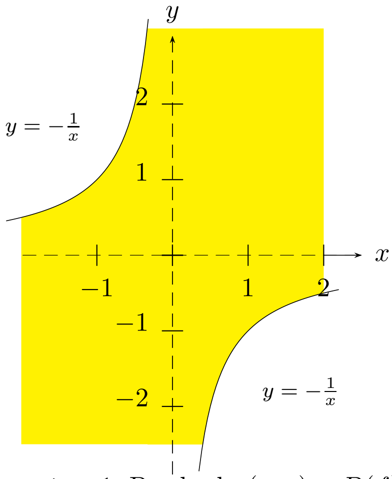
Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

3.5 Lze funkci $f(x,y) = \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ spojitě rozšířit na uzávěr jejího definičního oboru? Pokud ano, najděte toto rozšíření.

Řešení:

Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy}$ je

$$D(f): \quad x \neq 0 \quad \wedge \quad y \neq 0 \quad \wedge \quad xy \geq -1\ .$$



Uzávěr je tedy $\overline{D(f)}:\ xy \geq -1$. Pro body $(x,y) \in D(f)$ můžeme provést úpravu

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{xy+1}-1}{xy} \cdot \frac{\sqrt{xy+1}+1}{\sqrt{xy+1}+1} = \frac{(xy+1)-1}{xy(\sqrt{xy+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$$

Nyní vidíme, že pro funkci $g(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy+1}+1}$ je $D(g) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq -1\} = \overline{D(f)}$ a funkce g je spojitá všude v $D(g)$ (podle věty o složení spojitých funkcí). Současně se funkce g shoduje s funkcí f na množině $D(f)$, takže g je spojité rozšíření funkce f na množině $\overline{D(f)}$.

3.6 Lze funkci $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x}$ spojitě rozšířit na uzávěr jejího definičního oboru? Pokud ano, najděte toto rozšíření.

Řešení:

Definiční obor je $D(f):\ x \neq 0$, takže $\overline{D(f)} = \mathbb{R}^2$. Protože víme, že $\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, zkusíme toto využít pro úpravu funkce f a to jako

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot y$$

pro body $(x,y) \in D(f)$ takové, že $y \neq 0$.

Nyní můžeme udělat následující:

- funkce

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

je spojitá v celém $\mathbb{R}$.

- funkce $g(x,y) = xy$ je spojitá v celém $\mathbb{R}^2$ (je to polynom) a tedy složená funkce

$$F(x,y) = h(g(x,y)) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$

  je spojitá v celém $\mathbb{R}^2$

- platí $f(x,y) = F(x,y) \cdot y$ pro všechna $(x,y) \in D(f)$ protože pokud je pro tento bod $y \neq 0$, pak

$$F(x,y) \cdot y = \frac{\sin xy}{xy} \cdot y = \frac{\sin xy}{x} = f(x,y)$$

  a pokud je $y = 0$, pak je

$$F(x,y) \cdot y = 1 \cdot 0 = 0 = \frac{\sin(x \cdot 0)}{x} = f(x,y).$$

Tedy spojitá funkce

$$F(x,y) \cdot y = \begin{cases} \frac{\sin xy}{x}, & x \neq 0 \\ y, & x = 0 \end{cases}$$

je rozšířením funkce $f(x,y)$ na celém $\mathbb{R}^2$.

A toto rozšíření je jednoznačné, protože je určeno hodnotami limit funkce $f(x,y)$ v bodech na ose x (ty existují, protože jsou stejné jako limity funkce $F(x,y) \cdot y$, o které už víme, že je spojitá.)