4. cvičení z Matematické analýzy 2

10. - 14. října 2022

Připomenutí:

Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a nechť a_0 je vnitřní bod jejího definičního oboru. *Derivace podle vektoru* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ funkce f v bodě a_0 je definována jako následující (konečná) hodnota

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{h}}(a_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a_0 + t\vec{h})|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_0 + t\vec{h}) - f(a_0)}{t}$$

Neboli: Definiční obor $D(f)$ "projíždíme" po přímce $\varphi(t) = a_0 + t\vec{h}$, kde t představuje čas a $\vec{h}$ tím pádem vektor rychlosti pohybu po dané přímce. A ptáme se, jak se rychle se přitom budou měnit hodnoty funkce f při průchodu bodem a_0. Je zřejmé, že čím větší bude rychlost průchodu $\vec{h}$, tím rychlejší budou i změny hodnot funkce f.

Speciálně definujeme tzv. *parciální derivaci podle i-té proměnné* (dejme tomu, že se bude jmenovat x_i) jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) := \frac{\partial f}{\partial \vec{e}_i}(a_0)$$

kde $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{tá pozice}}, 0, \ldots, 0)$ je vektor standardní báze.

Konkrétně pro funkci $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a vnitřní bod $a_0 = (x_0, y_0)$ definičního oboru $D(f) = D$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

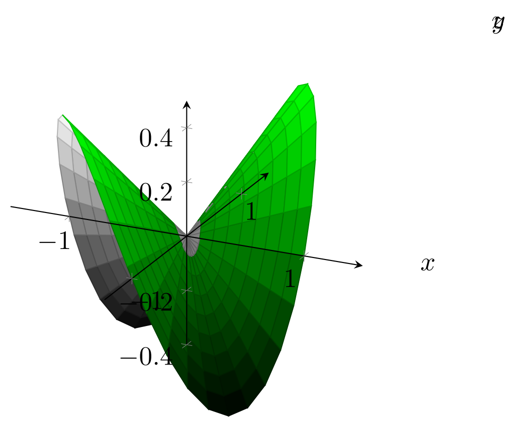
tedy funkci f stačí "obyčejně" derivovat podle proměnné x, kde druhou proměnnou y bereme na chvíli jako konstantu.

4.1 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pro } (x, y) = (0, 0)\ . \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení:
Graf funkce f:



V bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)(a) = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - xy\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}2x}{(\sqrt{x^2+y^2})^2} =$$

$$= \frac{y(x^2+y^2) - yx^2}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

Pro bod $a = (0, 0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pro } (x, y) = (0, 0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0, 0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \frac{y^3}{(y^2)^{3/2}} = \begin{cases} 1, & \text{pro } y > 0, \\ -1, & \text{pro } y < 0 \ . \end{cases}$$

Tedy nejenže $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0, y)$ není rovna 0 (což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$), ale dokonce tato limita vůbec neexistuje. Tedy ani limita

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

neexistuje a funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v bodě $(0, 0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x, y) \neq (0, 0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

Důležitá poznámka: Hodnotu $\frac{\partial f}{\partial x}(a_0)$ nelze obecně počítat jako $\lim\limits_{a\to a_0} \frac{\partial f}{\partial x}(a)$! Často ale ano, a to ovšem právě tehdy, jestliže funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ je spojitá v bodě a_0.

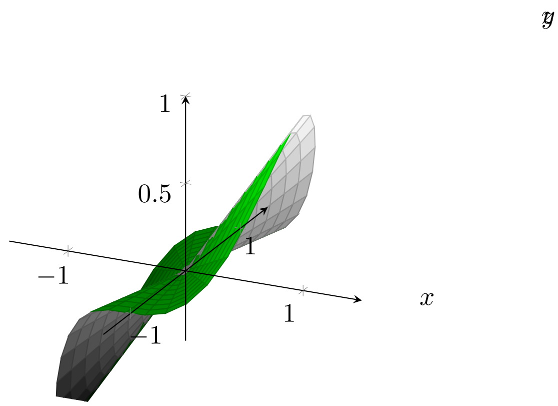
4.2 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & , \ (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & , \ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0,0)$?

Řešení:

Graf funkce f:



V bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x,y) = \frac{x^3}{x^2+y^2}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{x^2+y^2}\right)(a) = \frac{3x^2(x^2+y^2) - 2x \cdot x^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Pro bod $a = (0,0)$, který nemá v žádném svém okolí "jednotný" předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^3}{t^2+0} - 0}{t} = 1 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 1, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

a podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0,0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme, že

$$\lim_{y \to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y \to 0} 0 = 0 \ .$$

Tedy limita

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

nemůže být rovna 1, což je hodnota $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, a tedy funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ *není spojitá v bodě* $(0,0)$.

Na druhou stranu, jak je snadno vidět díky předpisu a spojitosti funkcí, v bodech $a = (x,y) \neq (0,0)$ funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá je.

Připomenutí: *Derivace (totální diferenciál)* funkce f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $a_0 \in D(f)$ definičního oboru $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je takové lineární zobrazení (označené jako $f'(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), které je nejlepší aproximací funkce f v bodě a_0 v tomto smyslu:

Rozdíl hodnot funkcí $f(a)$ a

$$g(a) := f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0]$$

klesá v okolí bodu a_0 rychleji než $\|a - a_0\|$, tj.

$$\lim_{a \to a_0} \tfrac{f(a)-g(a)}{\|a-a_0\|} = \lim_{a \to a_0} \tfrac{f(a)-f(a_0)-f'(a_0)[a-a_0]}{\|a-a_0\|} = 0 \ .$$

Funkce g se nazývá *linearizací* funkce f v bodě a_0.

Také to můžeme říct tak, že existuje $\varepsilon > 0$ a funkce ω definovaná na ε-okolí počátku souřadnic $\vec{0}$ taková, že

$$\lim_{\vec{u} \to \vec{0}} \omega(\vec{u}) = 0$$

a platí, že

$$f(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \|\vec{h}\| \cdot \omega(\vec{h})$$

pro každý vektor $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ takový, že $\|\vec{h}\| < \varepsilon$.

Poznámka:

- Pokud existuje derivace $f'(a_0)$, pak také existují derivace $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)$ podle vektoru pro každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a platí, že

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}] \ .$$

  Speciálně, existují pak všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$ a matice zobrazeni $f'(a_0)$ ve standardní bázi má tvar

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \ , \ldots , \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \right) \ .$$

  (Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení a jeho matici ve standardní bázi.)

  POZOR: Pouhá existence parciálních derivací ještě nezaručuje existenci (úplné) derivace! Ta je mnohem komplikovanější objekt. Máme ale tuto postačující podmínku:

- Nechť všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existují a *jsou spojité* na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak derivace $f'(a)$ existuje v každém bodě $a \in G$.

Definice: Nechť existuje $f'(a_0)$. *Gradient funkce* f v bode a_0 je takový vektor $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^n$, že pro každé $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je

$$f'(a_0)[\vec{h}] = \mathrm{grad} f(a_0) \cdot \vec{h}$$

(kde $\cdot$ je standardní skalární součin). Tedy ve standardní bázi máme

$$\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

a proto gradient i derivaci budeme ztotožňovat.

Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ je *směrem nulového růstu* funkce f v bodě a_0 právě když $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(a_0) = 0$ (a vektor $\vec{v}$ je směr, tj. $\|\vec{v}\| = 1$.)

4.3 Pro funkci $f(x,y) = xy + \sin(x-y)$ v bodě $a_0 = (2,2)$ určete derivaci, tečnou rovinu a přímku, která je k ní kolmá a prochází bodem $B = (0,-1,3)$.

Ve kterém ze směrů $\vec{u}_1 = (0,1)$ a $\vec{u}_2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ má funkce větší růst?

Řešení:

Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \cos(x-y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y - \cos(x-y) \ .$$

Z jejich spojitosti v okolí bodu $a_0 = (x_0, y_0) = (2,2)$ (spojité jsou dokonce všude na $\mathbb{R}^2$) vidíme, že derivace $df(a_0)$ skutečně existuje. Máme tedy

$$\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \Big(y + \cos(x-y),\ x - \cos(x-y)\Big)(a_0) = (3,1)$$

a tudíž

$$df(a_0)[\vec{h}] = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3,1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 3h_1 + h_2 \ .$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0)\cdot(x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\cdot(y - y_0) =$$
$$= 4 + 3(x-2) + y - 2$$

neboli

$$3x + y - z = 4$$

Vektor kolmý k tečné rovině má tedy vždy tvar $\vec{n} = (\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial x}(a_0), -1) = (3,1,-1)$. Rovnice hledané přímky pak je

$$p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Oba vektory $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ jsou skutečně směry (tj. $\|\vec{u}_1\| = 1 = \|\vec{u}_2\|$), takže z hlediska růstu funkce stačí spočítat derivace v těchto směrech (kdyby vektory měly obecně různou délku, pak bychom je měli nejdříve znormovat a pak teprve počítat derivaci ve směru). Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_1] = (3,\ 1)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_2] = (3,\ 1)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}$$

takže větší růst je v $\vec{u}_2$.

Poznámka: Nechť pro funkci $f(x,y)$ existuje $\mathrm{grad} f(a_0) \in \mathbb{R}^3$ v bodě $a_0 = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Pak vektor $\vec{U} \in \mathbb{R}^3$ leží ve vektorovém prostoru příslušnému tečné rovině v bodě a_0 právě když je

$$(\mathrm{grad} f(a_0), -1)\cdot\vec{U} = 0 \ ,$$

kde $(\mathrm{grad} f(a_0), -1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right)$

Je to proto, ze rovnice tečné roviny má tvar $z = f(a_0) + \mathrm{grad} f(a_0)[a - a_0]$ neboli

$$(\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - f(a_0) \end{pmatrix} = 0 \;.$$

Neboli $(\mathrm{grad} f(a_0), -1)$ je normálový vektor tečné roviny (a jejího přidruženého vektorového prostoru).

Nechť je nyní $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Nechť $\vec{u} = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ představuje vektor z jeho prvních dvou souřadnic (neboli $\vec{u}$ je projekce $\vec{U}$ do základny). Pak $\vec{U}$ leží v tečné rovině právě když

$$0 = (\mathrm{grad} f(a_0), -1) \cdot \vec{U} = \alpha \cdot \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) + \beta \cdot \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) + \gamma \cdot (-1) = df(a_0)[\vec{u}] - \gamma = \tfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) - \gamma$$

neboli když

$$\gamma = \tfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0), \quad \text{pro} \;\; \vec{u} = (\alpha, \beta)$$

tudíž vektor $\vec{U}$ je prostě tvaru

$$\vec{U} = \left(\vec{u}, \tfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right) \;.$$

Současně si všimněme, že úhel $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, který svírá vektor $\vec{U} = (\alpha, \beta, \gamma) = \left(\vec{u}, \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0)\right)$ se základnou je dán jako

$$\mathrm{tg}(\varphi) = \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\|\vec{u}\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = \frac{df(a_0)[\vec{u}]}{\|\vec{u}\|} \;.$$

4.4 Pro funkci $f(x, y) = \mathrm{arctg}(xy^2)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$ určete totální diferenciál, tečnou rovinu a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Určete vektory $\vec{U}_1 = (0, 1, ?)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, ?)$ tak, aby ležely ve vektorovém prostoru odpovídajícímu tečné rovině. Který z vektoru ukazuje směrem většího stoupání v tečné rovině?

Řešení:

Budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.3**. Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení $df(a)$ a jeho matici ve standardní bázi.

Pro $a_0 = (1, 1)$ tedy máme

$$df(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{y^2}{1 + xy^2}, \frac{2xy}{1 + xy^2}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, 1\right) \;.$$

Existence $f'(a_0)$ plyne ze spojitosti parciálních derivací v obecném bodě - viz řádek výše.

Tečná rovina je graf linearizace funkce f v daném bodě $a_0 = (x_0, y_0)$. Má tedy rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

neboli

$$z = f(a_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \left(\tfrac{1}{2},\; 1\right) \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 1 \end{pmatrix} = \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x - 1) + y - 1$$

což se dá přepsat také jako

$$\tfrac{1}{2}x + y - z = \tfrac{3}{2} - \tfrac{\pi}{4} \;.$$

Derivace ve směru $\vec{u}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] = \left(\tfrac{1}{2},\; 1\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \tfrac{3\sqrt{2}}{2}.$$

A nakonec, podle poznámky výše, potřebujeme zjistit derivace podle vektorů $\vec{u}_1 = (0, 1)$ a $\vec{u}_2 = (2, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_1] = (1,\; 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2$$

a

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_2] = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 4$$

Všimněme si, že každý z vektorů $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ má jinou délku.

Jde tedy o vektory $\vec{U}_1 = (0, 1, 2)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, 4)$, které svírají se základnou postupně úhly φ_1 a φ_2 takové, že

$$\mathrm{tg}(\varphi_1) = \frac{1}{\|\vec{u}_1\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_1}(a_0) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\mathrm{tg}(\varphi_2) = \frac{1}{\|\vec{u}_2\|} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = \frac{4}{\sqrt{5}}\ (< 2)$$

takže větší stoupání v tečné rovině ukazuje vektor v $\vec{U}_1$.

4.5 Pro funkci $f(x, y) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$ určete

(a) totální diferenciál a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

(b) směry největšího a nejmenšího růstu a směry nulového růstu,

(c) tečnou rovinu,

(d) úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení:

Definiční obor je $D(f) : y \neq 0$, což je otevřená množina a protože zde všechny parciálních derivace existují a jsou spojité (jak se ihned přesvědčíme), tak derivace v bodě a_0 skutečně existuje. Dále budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.3**.

(a) Pro $a_0 = (1, 1)$ je

$$f'(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{1}{y(1 + (\frac{x}{y})^2)}, -\frac{x}{y^2(1 + (\frac{x}{y})^2)}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right)\ .$$

Máme

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}_2}(a_0) = f'(a_0)[\vec{u}_2] = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}.$$

(b) Směrem největšího růstu $\vec{v}$ je směr gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr daný vektorem $\mathrm{grad} f(a_0) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ (konkrétně jde o směr $\vec{v} = \frac{\mathrm{grad} f(a_0)}{\|\mathrm{grad} f(a_0)\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$).

Směrem nejmenšího růstu je směr opačný ke gradientu (pokud je nenulový), tj. je to směr $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Směry nulového růstu $\vec{w}$ jsou kolmé ke gradientu, tj. jde o směry určené vektory $(1, 1)$ a $(-1, -1)$, konkrétní směry (tj. znormované vektory) tedy jsou

$$\vec{w}_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{a} \quad \vec{w}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\ .$$

(c) Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + f'(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= \tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2}(x-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)$$

neboli

$$x - y - 2z = -\tfrac{\pi}{2}$$

(d) Úhel mezi rovinami ϱ_1 a ϱ_2 je určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} \ .$$

Normálový vektor tečné roviny je

$$\vec{n}_1 = (\mathrm{grad} f(a_0), -1) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\right)$$

normálový vektor základny je

$$\vec{n}_2 = (0,0,1) \ .$$

Tedy

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2})^2 + 1^2} \cdot 1} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

a hledaný úhel je

$$\alpha = \arccos\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \doteq 35.26^\circ \ .$$

4.6 Určete tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = e^{-xy}\cos x + y^2$ v bodě $a_0 = (0,2)$ a úhel, který tato rovina svírá s rovinou $\sigma : x + y + z = 2$. V bodě a_0 určete derivaci funkce f ve směru $\vec{u} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v příkladu **4.3**.

Pro $a_0 = (0,2)$ máme

$$df(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(-ye^{-xy}\cos x - e^{-xy}\sin x, -xe^{-xy}\cos x + 2y\right)(a_0) = (-2,\ 4) \ .$$

Existence $f'(a_0)$ plyne ze spojitosti parciálních derivací v obecném bodě.

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 5 + (-2,\ 4)\begin{pmatrix} x \\ y-2 \end{pmatrix} = 5 - 2x + 4(y-2)$$

což se dá přepsat také jako

$$2x - 4y + z = -3 \ .$$

Derivace ve směru $\vec{u}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] = (-2,\ 4) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = 3\sqrt{2}.$$

Úhel mezi tečnou rovinou a rovinou σ určíme pomocí jejich normálových vektorů.

Normálový vektor tečné roviny určíme pomocí její rovnice, tedy

$$\vec{n}_1 = (2, -4, 1) \ .$$

Normálový vektor roviny σ je

$$\vec{n}_2 = (1, 1, 1) \ .$$

Tedy

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{1}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{21},$$

a hledaný úhel je

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\sqrt{7}}{21}\right) \doteq 82.76^\circ \ .$$