5. cvičení z Matematické analýzy 2

17. - 21. října 2022

Věta: Nechť U je otevřená množina v $\mathbb{R}^3$, $\Phi : U \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná na G. Označme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$$

což je zřejmě vrstevnice funkce Φ.

Jestliže pro každé $a \in M$ platí, že $\text{grad}\Phi(a) \neq \vec{0}$, pak M implicitně definovaná (regulární) plocha. Tečná rovina k M v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ má rovnici

$$\text{grad}\Phi(a_0) \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0.$$

Poznámka: Každý graf spojitě diferencovatelné funkce $f : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^2$ je otevřená v $\mathbb{R}^2$, můžeme přirozeně chápat jako implicitně definovanou (regulární) plochu pomocí funkce $\Phi : G \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\Phi(x, y, z) := f(x, y) - z$$

protože

$$GRAF\ (f) = \{(x, y, z) \in G \times \mathbb{R} \mid\ z = f(x, y)\ \} = \{(x, y, z) \in G \times \mathbb{R} \mid\ \Phi(x, y, z) = 0\ \}$$

Současně vidíme, že normálový vektor tečné roviny ke grafu funkce f v bodě $A_0 = \big(a_0, f(a_0)\big)$ pro $a_0 \in G$ je

$$\text{grad}\Phi(A_0) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial y}(A_0), \frac{\partial \Phi}{\partial z}(A_0)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1\right) \neq \vec{0}$$

tedy je nenulový.

5.1 (úhly grafů funkcí)

Nalezněte úhel, který svírají

(a) graf funkce $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ a plocha $M : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$ v bodě $(1, 0, ?)$.

(b) graf funkce $f(x, y) = e^{\sin xy}$ a plocha $M : (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 = 7$ v bodě $(0, 2, ?)$.

Řešení:

Úhel, který svírají implicitně dané plochy M_1 a M_2, je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2, tj. gradienty funkcí Φ_1 a Φ_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||}\ .$$

(a) Třetí souřadnice bodu $A = (1, 0, ?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(1, 0) = \ln(1) = 0$. Tedy jde o bod $A = (1, 0, 0)$. Je dobře ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x, y, z) = f(x, y) - z = \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) - z\ .$$

Plocha M je zadaná implicitně funkcí

$$\Phi_2(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 2\ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (1, 0, 0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad}\ \Phi_1(A) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ \frac{y}{x^2 + y^2},\ -1\right)_{|A} = (1, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ 2(y+1),\ 2(z+1)\Big)_{|A} = (0,2,2)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{||\vec{n}_1||\cdot||\vec{n}_2||} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(b) Třetí souřadnice bodu $A = (0,2,?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(0,2) = e^{\sin 0} = 1$. Tedy jde o bod $A = (0,2,1)$. Je dobré ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x,y,z) = e^{\sin(xy)} - z\ .$$

Plocha M je zadána implicitně funkcí

$$\Phi_2(x,y,z) = (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 - 7\ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (0,2,1)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \text{grad } \Phi_1(A) = \Big(y\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ x\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ -1\Big)_{|A} = (2,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \text{grad } \Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ y,\ 2(z-3)\Big)_{|A} = (-2,2,-4)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{||\vec{n}_1||\cdot||\vec{n}_2||} = 0$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a plochy jsou vzájemně kolmé.

5.2 Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $M:\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$, která je rovnoběžná s rovinou $\varrho:\ 4x + 2y + z = 3$.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$.

Elipsoid $M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$ je implicitně zadán pomocí funkce $\Phi(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a množiny $U = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\text{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z)$.

Ověříme si, že v každém bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je skutečně $\text{grad}\Phi(a_0) \neq \vec{0}$ (tj. že v každém bodě M máme k dispozici normálový vektor tečné roviny $\text{grad}\Phi(a_0)$):

Dokážeme to nepřímo: zřejmě $\text{grad}\Phi(a) = (2x, 4y, 2z) = \vec{0}$ právě když $a = (0,0,0)$. Ovšem tento bod není v M, protože nesplňuje $\Phi(a) = 0$.

Normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je tedy právě $\text{grad}\Phi(a_0)$. Tato rovina bude rovnoběžná s ϱ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho = (4,2,1)$, právě když

$$(2x_0, 4y_0, 2z_0) = \text{grad}\Phi(a_0) = \lambda\cdot\mathbf{n}_\varrho = \lambda\cdot(4,2,1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x_0, y_0, z_0) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho$, tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $a_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{19}}\cdot(4,1,1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

5.3 Nechť p je přímka procházející body $(1,2,3)$ a $(2,3,4)$. Najděte rovnici tečné roviny k elipsoidu $M: \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, která je kolmá na přímku p.

Řešení:
Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$:

Přímka p má směrový vektor $\vec{n}=(2,3,4)-(1,2,3)=(1,1,1)$.

Elipsoid $M=\{a\in U \mid \Phi(a)=0\}$ je implicitně zadán pomocí funkce $\Phi(x,y,z)=\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}-1$ a množiny $G=\mathbb{R}^3$. Zřejmě $\operatorname{grad}\Phi(a)=\left(\frac{2x}{25},\frac{2y}{16},\frac{2z}{9}\right)$. Takže $\operatorname{grad}\Phi(a)=\vec{0}$ právě když $a=(0,0,0)$. Ovšem tento bod není v M. Můžeme proto použít uvedenou větu a normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0=(x_0,y_0,z_0)\in M$ je právě $\operatorname{grad}\Phi(a_0)$. Tečná rovina bude mít za normálový vektor $\vec{n}=(1,1,1)$, právě když

$$\left(\frac{2x_0}{25},\frac{2y_0}{16},\frac{2z_0}{9}\right)=\operatorname{grad}f(a_0)=\lambda\cdot\mathbf{n}=\lambda\cdot(1,1,1)$$

pro nějaké $\lambda\in\mathbb{R}$. Tedy $(x_0,y_0,z_0)=\frac{\lambda}{2}(25,16,9)$. Současně má také platit, že $\frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{16}+\frac{z_0^2}{9}=1$. Dostáváme $\lambda=\pm 2/\sqrt{25}$ a tečné roviny jsou

$$x+y+z=5\sqrt{2}$$

pro bod $\left(\frac{25}{\sqrt{25}},\frac{16}{\sqrt{25}},\frac{9}{\sqrt{25}}\right)\in M$ a

$$x+y+z=-5\sqrt{2}$$

pro bod $\left(-\frac{25}{\sqrt{25}},-\frac{16}{\sqrt{25}},-\frac{9}{\sqrt{25}}\right)\in M$.

Připomenutí: Derivace zobrazení s více složkami se definuje analogicky jako pro reálnou (jednosložkovou) funkci. Tedy:

Nechť $U\subseteq\mathbb{R}^n$ je otevřená množina. *Derivace* zobrazení $\Phi: U\to\mathbb{R}^m$ ve bodě $a_0\in U$ je takové lineární zobrazení (označené jako $\mathrm{d}\Phi(a_0):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$), které je nejlepší aproximací zobrazení Φ v bodě a_0 v tomto smyslu:

$$\lim_{a\to a_0}\frac{\|\ \Phi(a)-\Phi(a_0)-\mathrm{d}\Phi(a_0)[a-a_0]\ \|}{\|a-a_0\|}=0$$

kde jsme v čitateli výrazu použili normu (v $\mathbb{R}^m$), což je ekvivalentní tomu, že výše uvedená limita platí v každé složce výrazů v čitateli. Upřesněme, co se tím myslí:

Nechť jednotlivé složky zobrazení jsou funkce $f_i: U\to\mathbb{R}^m$, $i=1,\dots,m$, tedy

$$\Phi(a)=\big(f_1(a),\dots,f_m(a)\big)\quad\text{pro}\quad a\in U$$

pak výše uvedená limita platí právě když

$$\lim_{a\to a_0}\frac{f_i(a)-f_i(a_0)-\Big(\mathrm{d}\Phi(a_0)[a-a_0]\Big)_i}{\|a-a_0\|}=0\qquad\text{pro}\qquad i=1,\dots,m$$

kde $\Big(\mathrm{d}\Phi(a_0)[a-a_0]\Big)_i$ je i-tá složka vektoru $\mathrm{d}\Phi(a_0)[a-a_0]$.

Také to celé můžeme říct tak (jako u jednosložkové funkce), že pro lineární zobrazení $\mathrm{d}\Phi(a_0)$ platí:

$$\Phi(a_0+\vec{h})=\Phi(a_0)+\mathrm{d}\Phi(a_0)[\vec{h}]+o\big(\|\vec{h}\|\big)$$

Existence derivace: Nechť $U\subseteq\mathbb{R}^n$ je otevřená množina. Nechť $\Phi=(f_1,\dots,f_m): U\to\mathbb{R}^m$ je takové zobrazení, že všechny složky $f_i: U\to\mathbb{R}^m$ jsou spojitě diferencovatelné (říkáme pak, že Φ je spojitě diferencovatelné, neboli třídy C^1). Pak pro $a\in U$ existuje derivace $\mathrm{d}\Phi(a)$ a její matice (ve standardní bázi) typu $m\times n$ je

$$\mathrm{d}\Phi(a)=\begin{pmatrix}\operatorname{grad} f_1(a)\\ \vdots\\ \operatorname{grad} f_m(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$

kde opět ztotožňujeme lineární zobrazení s jeho maticí.

Derivace složeného zobrazení: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a $V \subseteq \mathbb{R}^m$ jsou otevřené množiny (v příslušných prostorech). A mějme zobrazení

$$\begin{array}{ccccc} U & \xrightarrow{\Phi} & V & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ \cap\!\!| & & \cap\!\!| & & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^m & & \end{array}$$

se složkami $\Phi = (f_1, \dots, f_m)$.

Jestliže existuje derivace $\mathrm{d}\Phi(a)$ v bodě $a \in U$ a derivace $\mathrm{d}g(b)$ v bodě $b = \Phi(a) \in V$, pak existuje derivace $\mathrm{d}\Big(g \circ \Phi\Big)(a)$ a platí:

$$\mathrm{d}\Big(g \circ \Phi\Big)(a) = \mathrm{d}g(b) \circ \mathrm{d}\Phi(a) = \mathrm{d}g\Big(\Phi(a)\Big) \circ \mathrm{d}\Phi(a)$$

a maticově zapsáno je to:

$$\left(\frac{\partial\Big(g \circ \Phi\Big)}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial\Big(g \circ \Phi\Big)}{\partial x_n}(a)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial y_1}(b), \dots, \frac{\partial g}{\partial y_m}(b)\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

kde opět ztotožňujeme lineární zobrazení s jeho maticí.

Konkrétně, pro

$$(g \circ \Phi)(x_1, \dots, x_n) = g\Big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\Big)$$

z tohoto vyplývá tzv. řetězové pravidlo (což je jen přepis maticového násobení) a to ve tvaru

$$\frac{\partial(g \circ \Phi)}{\partial x_i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial y_j}(b) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(a)$$

5.4 Nechť $f = f(u, v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Najděte (obecně) derivaci funkce

(a) $g(x, y, z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$,

(b) $g(s, t) = f(\frac{s}{t}, t - s)$,

(c) $g(r, \varphi) = f(r \cos\varphi, r \sin\varphi)$ pro $0 < \varphi < 2\pi$ a $r > 0$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce g je $D(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0, z \neq 0\}$. Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z})\Big) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{y}{z})}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z})$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(f(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z})\Big) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{y}{z})}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z})$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(f(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z})\Big) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{y}{z})}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \,.$$

(b) Definiční obor funkce g je $D(g) = \{(s, t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0\}$. Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\Big(f(\tfrac{s}{t}, t-s)\Big) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t}, t-s)\cdot\frac{\partial(\frac{s}{t})}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t}, t-s)\cdot\frac{\partial(t-s)}{\partial s} = \frac{1}{t}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t}, t-s) - \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t}, t-s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(f(\tfrac{s}{t}, t-s)\Big) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t}, t-s)\cdot\frac{\partial(\frac{s}{t})}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t}, t-s)\cdot\frac{\partial(t-s)}{\partial t} = -\frac{s}{t^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t}, t-s) + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t}, t-s)\ .$$

(c) Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial r} =$$

$$= \cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + \sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}\big(f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\big) = \frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial \varphi} =$$

$$= -r\sin\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + r\cos\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$$

Poznámka: Derivaci v části (c) můžeme využít při tzv. transformaci diferenciálních výrazů, které se hodí např. při řešení parciálních diferenciálních rovnic. Řekněme, že hledáme funkci f splňující rovnici $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Pro jednoduchost omezme definiční obor funkce f na $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$. Místo funkce f teď uvažujme funkci $g = f\circ\Phi$, kde Φ je bijektivní zobrazení

$$\begin{aligned} \Phi : (0,+\infty)\times(0,2\pi) \quad &\to \quad \mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\mid x\geq 0\} \\ (r,\varphi) \quad &\mapsto \quad (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

Spočítáme si derivaci g jako $g'(\alpha) = f'(\Phi(\alpha))\circ\Phi'(\alpha)$ tedy pomocí matic to je

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Odsud vypočítáme např. invertováním matice

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

Takže po dosazení (a vyjádření x a y pomocí r a φ) dostáváme

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = r\cos\varphi\left(\sin\varphi\ \frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\ \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) - r\sin\varphi\left(\cos\varphi\ \frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\ \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}$$

Rovnice $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ je tak ekvivalentní rovnici $\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$. Tedy má platit $\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$, neboli $g(r,\varphi) = h(r)$ pro nějakou diferencovatelnou funkci h. Řešení původní rovnice tak je

$$f(x,y) = (g\circ\Phi^{-1})(x,y) = h(\sqrt{x^2+y^2})$$

kde h je libovolná diferencovatelná funkce.

Definice: Parciální derivace vyšších řádů funkce $f : U \to \mathbb{R}$ (kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina) v bodě $a \in U$ definujeme induktivně jako

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\ldots\partial x_{i_k}}(a) := \frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\left(\frac{\partial^{k-1} f}{\partial x_{i_2}\ldots\partial x_{i_k}}\right)(a)$$

kde $\frac{\partial^1 f}{\partial x_i} := \frac{\partial f}{\partial x_i}$ a $k \in \mathbb{N}$. Dále se zavádí zkrácené značení $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ a podobně pro vyšší derivace.

Dále: Jestliže v každém bodě $a \in U$ existuje derivace $\mathrm{d}f(a)$, získáme zobrazení

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ a &\mapsto \mathrm{d}f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right) \end{aligned}$$

Pokud nyní v $a_0 \in U$ existuje derivace

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}f)(a_0) = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \\ \vdots \\ \operatorname{grad} \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a_0) \end{pmatrix} (= \mathbb{A})$$

nazýváme tuto (čtvercovou) matici *Hessovou* maticí a druhou derivaci $\mathrm{d}^2 f(a_0)$ definujeme jako bilineární zobrazení

$$\mathrm{d}^2 f(a_0) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\mathrm{d}^2 f(a_0)[\vec{u}, \vec{v}] = \vec{u}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{v} \quad \text{pro} \quad \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$$

Obvykle nám ale stačí pracovat s kvadratickým homogenním polynomem (tzv. kvadratickou formou)

$$Q[\vec{h}, \vec{h}] := \mathrm{d}^2 f(a_0)[\vec{h}, \vec{h}] = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a_0) \cdot h_i h_j \quad \text{pro} \quad \vec{h} = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \ .$$

Postačující podmínka existence druhé derivace: Jestliže funkce $f : U \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 (neboli: všechny druhé parciální derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$ pro $i, j = 1, \dots, n$ existují na celé množině U a jsou zde spojité) pak $\mathrm{d}^2 f(a)$ existuje pro $a \in U$ a odpovídající Hessova matice je symetrická.

Taylorův polynom: Taylorův polynom řádu 2 (pro bod a_0 a funkci f) je takový polynom $T_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stupně nejvýše 2, který nejlépe aproximuje funkci f v okolí bodu a_0 v tomto smyslu

$$f(a_0 + \vec{h}) = T_2(a_0 + \vec{h}) + o(\|\vec{h}\|^2)$$

tedy

$$\lim_{\vec{h} \to 0} \frac{f(a_0 + \vec{h}) - T_2(a_0 + \vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} = 0 \ .$$

Tento polynom je jednoznačně určený (pokud existuje).

Existence a tvar Taylorova polynomu: Jestliže existuje $\mathrm{d}^2 f(a_0)$, pak existuje i Taylorův polynom řádu 2 (pro bod a_0 a funkci f) a je tvaru

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + f'(a_0)[\vec{h}] + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a_0)[\vec{h}, \vec{h}]$$

kde $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$.

5.5 (Taylorův polynom)

Napište Taylorův polynom 2. řádu pro

(a) funkci $f(x, y) = e^{\sqrt{x} - y}$ v okolí bodu $a_0 = (1, 1)$. Určete pomocí něj přibližnou hodnotu $f(a)$ pro $a = (1.01,\ 0.98)$

(b) funkci $f(x, y) = \frac{1}{x - y}$ v okolí bodu $a_0 = (2, 1)$.

Řešení:

(i) Máme

$$\mathrm{d}f(a_0) = \left(e^{\sqrt{x} - y} \frac{1}{2\sqrt{x}},\ -e^{\sqrt{x} - y}\right)_{|a_0} = (\tfrac{1}{2}, -1)$$

a

$$\mathrm{d}^2 f(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{4x} - e^{\sqrt{x}-y}\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{4} & -e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ -e^{\sqrt{x}-y}\frac{1}{2\sqrt{x}} & e^{\sqrt{x}-y} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = f(a_0) + \mathrm{d}f(a_0)[\vec{h}] + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a_0)[\vec{h}, \vec{h}] =$$

$$= 1 + (\tfrac{1}{2}, -1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2)\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + \tfrac{1}{2}h_1 - h_2 - \tfrac{1}{8}h_1 h_2 + \tfrac{1}{2}h_2^2$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2)$.

Takže pro $\vec{h} = (0.01,\ -0.02)$ máme

$$f(a) \doteq T(a) = T(a_0 + \vec{h}) = 1 + \tfrac{1}{2}0.01 + 0.02 + \tfrac{1}{8}0.01 \cdot 0.02 + \tfrac{1}{2}0.02^2 = 1.025225\ .$$

(Pro srovnání skutečná hodnota zaokrouhlená na 9 desetinných míst je $f(a) \doteq 1.025302368$.)

(ii) Podobně dostaneme:

$$\mathrm{d}f(a_0) = \left(-\frac{1}{(x-y)^2},\ \frac{1}{(x-y)^2}\right)_{|a_0} = (-1, 1)$$

a

$$\mathrm{d}^2 f(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{2}{(x-y)^3} & -\frac{2}{(x-y)^3} \\ -\frac{2}{(x-y)^3} & \frac{2}{(x-y)^3} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tedy

$$T_2(a_0 + \vec{h}) = 1 + (-1, 1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(h_1, h_2)\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 - h_1 + h_2 + h_1^2 - 2h_1 h_2 + h_2^2$$

kde $\vec{h} = (h_1, h_2)$.