6. cvičení z Matematické analýzy 2

24. - 28. října 2022

Budeme vyšetřovat extrémy funkcí. Nejdříve to budou *lokální* extrémy funkce f na *otevřené* množině U.

Postup při hledání *lokálních* extrémů funkce f na *otevřené* množině U bude tento:

- najdeme body $a \in U$, kde je $\mathrm{d}f(a) = (0, \dots, 0))$ (nutná podmínka);
- dále pak vyšetříme definitnost $\mathrm{d}^2 f(a)$ v těchto bodech.

Více viz "Poznámky k extrémům."

6.1 (lokální extrémy)
Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(b) $f(x, y) = 6xy - x^3 - 2y^3 + 2$,

(c) $f(x, y) = x^3 - y^3 - 2xy + 6$.

Řešení:
(a) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$\mathrm{d}f(x, y) = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x, y) = 0$ právě když $x^2 = y$ a $y^2 = x$, což je právě když $(x, y) = (0, 0)$ nebo $(x, y) = (1, 1)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

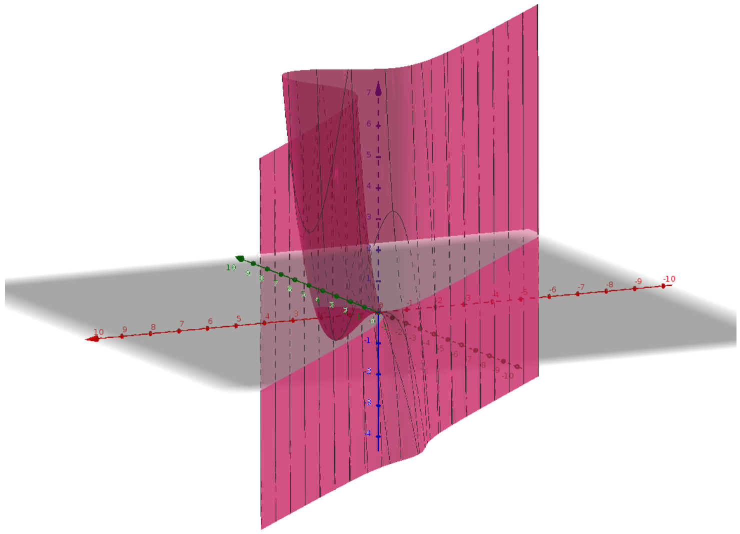
$$\mathrm{d}^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

- Pro $(x, y) = (0, 0)$ je $\mathrm{d}^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$\mathrm{d}^2 f(0, 0)[\vec{h}, \vec{h}] = -6h_1 h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0, 0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x, y) = (1, 1)$ je $\mathrm{d}^2 f(1, 1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x, 0) = x^3$).



(b) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$\mathrm{d}f(x,y) = (6y - 3x^2, 6x - 6y^2)$$

Tedy $\mathrm{d}(x,y) = 0$ právě když $2y = x^2$ a $x = y^2$. Tedy $2y = y^4$ a řešení jsou tak $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci.

$$\mathrm{d}^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} -6x & 6 \\ 6 & -12y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $\mathrm{d}^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$\mathrm{d}^2 f(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = 12 \cdot h_1 h_2$$

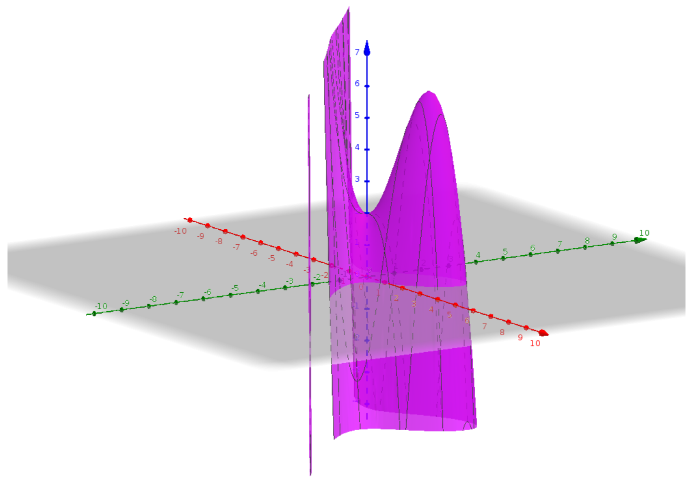
a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ je

$$\mathrm{d}^2 f\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt[3]{4} & 6 \\ 6 & -12\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -6\sqrt[3]{4} < 0$, $\Delta_2 = 72\sqrt[3]{8} - 36 = 72 \cdot 2 - 36 > 0$) je forma daná druhou derivaci negativně definitní a tedy v daném bodě je lokální MAXIMUM.

Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3 + 2$.



(c) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$f'(x,y) = (3x^2 - 2y, -3y^2 - 2x)$$

Tedy $f'(x,y) = 0$ právě když $3x^2 = 2y$ a $-3y^2 = 2x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$f''(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -2 \\ -2 & -6y \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $f''(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$f''(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = -4h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ je $f''(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -4 < 0$, $\Delta_2 = 16 - 4 = 12 > 0$) je forma negativně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MAXIMUM. Toto maximum ale není globální, protože funkce není shora omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3 + 6$).

6.2 (lokální extrémy)

Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x, y, z > 0$,

(b) $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xy - 2y + 2z$.

Řešení:

(i) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2},\ \ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x,y,z) = 0$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y^2 & = & 4x^2 \\ y^3 & = & 2xz^2 \\ y & = & z^3 \end{array} \quad \overset{y=z^3}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{rcl} (z^3)^2 & = & 4x^2 \\ (z^3)^3 & = & 2xz^2 \end{array} \quad \overset{x=z^7/2}{\Longrightarrow} \quad z^6 = 4\left(\frac{z^7}{2}\right)^2 \quad \overset{z>0}{\Longrightarrow} \quad z = 1$$

Řešení pro $x,y,z > 0$ je pouze $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$\mathrm{d}^2f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$ je

$$\mathrm{d}^2f\left(\frac{1}{2},1,1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12 - 4 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 72 - 16 - 24 = 32 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

(ii) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \left(3x^2 - 3y,\ 2y - 3x - 2,\ z + 2\right)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x,y,z) = (0,0,0)$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y & = & x^2 \\ 2y & = & 3x + 2 \\ z & = & -2 \end{array} \quad \overset{y=x^2}{\Longrightarrow} \quad 2x^2 = 3x + 2 \quad \Longrightarrow \quad x = 2 \ \vee \ x = -\frac{1}{2}$$

tedy řešení jsou právě $(x,y,z) = (2,4,-2)$ nebo $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4},-2\right)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci:

$$\mathrm{d}^2f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Pro $(x,y,z) = (2,4,-2)$ je

$$\mathrm{d}^2f(2,4,-2) = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = 24 - 9 = 15 > 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = 15 > 0$) je tato forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) minimum.

- Pro $(x,y,z) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right)$ je

$$\mathrm{d}^2 f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2\right) = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = -3 < 0$, $\Delta_2 = -6 - 9 = -15 < 0$, $\Delta_2 = \Delta_3 = -15 < 0$) je tato forma indefinitní a tedy v daném bodě je sedlo.

Můžeme ještě zjistit, jestli lokální extrémy jsou i globální. Protože zřejmě $f(x,0,0) = x^3$ a tato funkce nabývá všech hodnot, původní funkce f žádné globální extrémy nemá.

Dále budeme hledat *absolutní (globální)* extrémy funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M.

Postup při hledání *absolutních (globálních)* extrémů funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M bude tento:

- pomocí nutných podmínek (obvykle to jsou Lagrangeovy multiplikátory) vyloučíme ty body, kde určitě extrémy nejsou;
- ve zbylé množině podezřelých bodů (obvykle malé) srovnáme jejich funkční hodnoty, ze kterých vybereme největší a nejmenší;
- jestliže víme, že obou extrémů musí být nabyto, pak jsou to právě předchozí nalezené největší a nejmenší hodnoty v podezřelých bodech;
- při hledání pouze globálního minima podstupujeme obdobně - tj. hledáme nejmenší hodnotu mezi podezřelými body;
- Důležité: zde nepotřebujeme používat druhou derivaci! (Ostatně, globálnost případného extrému nám tato druhá derivace stejně nemůže potvrdit.)

Poznámka: Nechť M má tvar z Lagr. věty. Jestliže nějaký bod $a \in M$ nesplňuje podmínku o lineární nezávislosti $\operatorname{grad} g_1(a), \dots, \operatorname{grad} g_k(a)$, zařadíme ho automaticky mezi podezřelé body. Obvykle takových bodů není mnoho, případně funkce je na nich "uchopitelná". Proto při aplikaci Lagr. věty vlastně vždy ověřujeme, jestli všechny body z M splňují uvedenou podmínku pro lineární nezávislost. Pokud ano, vazbám $g_1, \dots, g_k$ se pak říká nezávislé.

Při hledání absolutních extrémů budeme využívat tyto věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ jsou spojitě diferencovatelné funkce. Položme

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} \{a \in U \mid g_i(a) = 0\}.$$

Nechť $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M. Jestliže vektory

$$\text{grad } g_1(a_0), \dots, \text{grad } g_k(a_0) \quad \text{jsou lineárně nezávislé}$$

pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$\text{grad} f(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \text{grad} g_i(a_0) \ .$$

(Jestliže výše zmíněná lineární nezávislost platí v každém bodě $a \in M$, pak se množina M nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb.)

Více viz "Poznámky k extrémům."

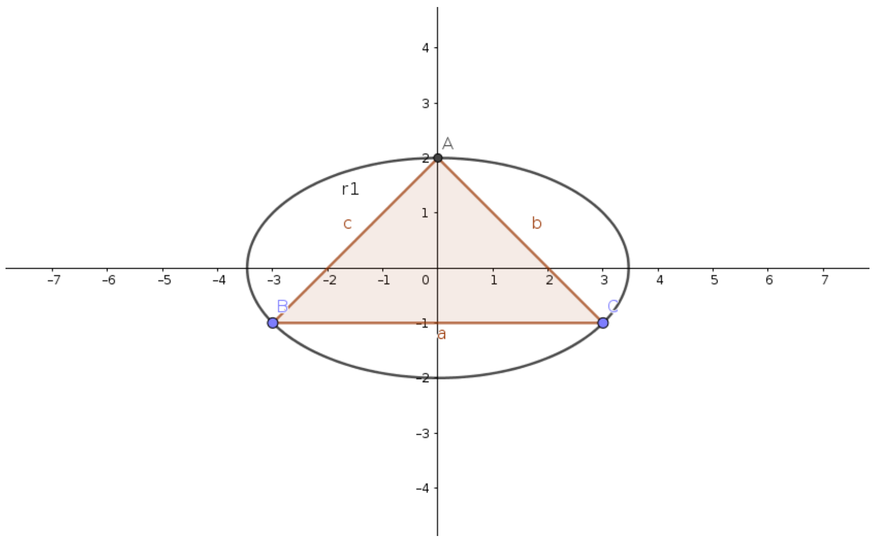
6.3 (vázané extrémy)

Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$ vepište rovnoramenný trojúhelník takový, že má základnu rovnoběžnou s osou x a má maximální obsah.

Řešení:
Vzhledem k symetrii elipsy, stačí vyšetřit případ, kdy jeden z vrcholů (x, y) základny bude ležet na polovině elipsy

$$M : x^2 + 3y^2 = 12 \quad \& \quad x > 0$$

a vrchol naproti základně bude v bodě $(0, 2)$.



Na M nyní hledáme maximum funkce

$$f(x, y) = x(2 - y)$$

(což je obsah daného trojúhelníka).

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Množina M je zadána implicitně jako

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi(x, y) = 0\}$$

kde $U : x > 0$ a vazbová funkce je

$$\Phi(x, y) = x^2 + 3y^2 - 12\ .$$

Dále, vektor grad $\Phi(x, y) = \Big(2x,\ 6y\Big)$ je nenulový pro každé $(x, y) \in M$ (jinak by to byl spor s tím, že má platit $x^2 + 3y^2 = 12$).

Věta o Lagrangeových multiplikátorech nám tedy říká, že pro extrém $a = (x, y)$ existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2 - y,\ -x\big) = \operatorname{grad} f(a) = \lambda \cdot \operatorname{grad}\Phi(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 6y\Big)$$

a

$$x^2 + 3y^2 = 12.$$

Z rovnic a omezení množinou U plyne, že ani jedna z hodnot x, y nemůže být nulová, takže máme

$$\begin{array}{rcl} 2 - y &=& 2\lambda x \\ -x &=& 6\lambda y \\ x^2 + 3y^2 &=& 12 \end{array} \quad \overset{\lambda = -x/(6y)}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} 2 - y = -\frac{x^2}{3y} \\ x^2 + 3y^2 = 12 \end{array} \quad \overset{x^2 = 12 - 3y^2}{\Longrightarrow} \quad 3y(2 - y) = 3y^2 - 12 \quad \overset{(x,y) \in M}{\Longrightarrow} \quad y = -1$$

tedy jediné řešení je $(x, y) = (3, -1)$ s hodnotou $f(3, -1) = 9$.

Abychom věděli, že spojitá funkce f bude nabývat svého maxima, potřebujeme množinu M uzavřít (omezená pak už bude). To znamená přidat k M body $(0, 2)$ a $(0, -2)$, které se tímto stanou dalšími podezřelými body z extrému. Jejich odpovídající hodnoty jsou

$$f\big(0, 2\big) = f\big(0, -2\big) = 0 \ .$$

Množina $\overline{M} = M \cup \{(0, 2),\ (0, -2)\}$ je nyní uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na $\overline{M}$ nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů vidíme, že pro vrchol $(3, -1)$ je skutečně nabyt maximální obsah.

6.4 (vázané extrémy)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$, Načrtněte útvar určený touto vazbou.

Řešení:

Hledáme absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x - y + 3$ na množině

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi(x, y) = 0\}$$

kde $U = \mathbb{R}^2$ (je tedy otevřená) a $\Phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$.

• Ověříme, že grad $\Phi(a) \neq (0, 0)$ pro každé $a \in M$:

Protože

$$\text{grad } \Phi(x, y) = \Big(6x + 5y,\ 5x + 6y\Big)$$

tak grad$\Phi(x, y) = (0, 0)$ právě když $(x, y) = (0, 0)$. Bod $(0, 0)$ ale není v M, takže v každém bodě $a \in M$ je grad$\Phi(a) \neq (0, 0)$.

• Z Langrangeovy věty proto máme, že v bodě $a = (x, y) \in M$ lokálního extrému f na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(1, -1) = \text{grad} f(a) = \lambda \cdot \text{grad}\Phi(a) = \lambda\Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$

a

$$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$

Jelikož z rovnic plyne, že $\lambda \neq 0$, dostáváme rovnici $6x + 5y = \frac{1}{\lambda} = -(5x + 6y)$. Odsud plyne $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:

$$(1, -1), \qquad (-1, 1)$$

s hodnotami

$$f(1, -1) = 5, \qquad f(-1, 1) = 1.$$

• Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = \Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

Doplněním na čtverec

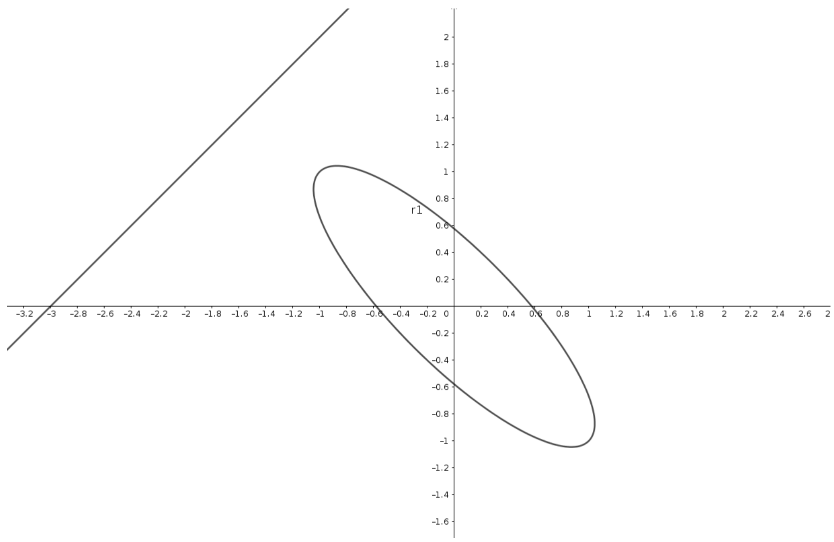
$$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\left(x + \frac{5}{6}y\right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$

zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma

$$Q(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = (x, y) \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria). Z toho pak plyne, že forma Q má ve vhodných ortonormálních souřadnicích diagonální matici se samými kladnými čísly. Odpovídající graf funkce Q tak je (eliptický) paraboloid. Protože $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x, y) = 1\}$ je vrstevnice funkce Q, musí to být elipsa.

• Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima v bodě $(1, -1)$ a minima v bodě $(-1, 1)$.



Poznámka: Úloha (a) je ekvivalentní tomu, když máme najít na implicitně zadané křivce $M: \; 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$ body, kde tečna přímka je rovnoběžná s přímkou $x - y + 3 = 0$.