7. cvičení z Matematické analýzy 2

31. října - 4. listopadu 2022

7.1 (vázané extrémy)
Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$,
Načrtněte útvar určený touto vazbou.

Řešení:
Hledáme absolutní extrémy funkce $f(x, y) = x - y + 3$ na množině

$$M = \{(x, y) \in U \mid \Phi(x, y) = 0\}$$

kde $U = \mathbb{R}^2$ (je tedy otevřená) a $\Phi(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 - 1$.

- Ověříme, že grad $\Phi(a) \neq (0, 0)$ pro každé $a \in M$:

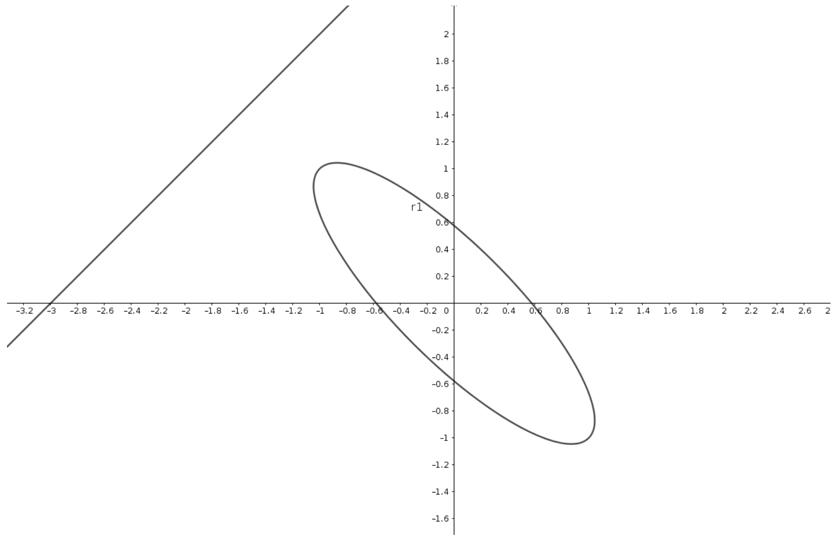
  Protože
  $$\text{grad } \Phi(x, y) = \Big(6x + 5y,\ 5x + 6y\Big)$$
  tak $\text{grad}\Phi(x, y) = (0, 0)$ právě když $(x, y) = (0, 0)$. Bod $(0, 0)$ ale není v M, takže v každém bodě $a \in M$ je $\text{grad}\Phi(a) \neq (0, 0)$.

- Z Langrangeovy věty proto máme, že v bodě $a = (x, y) \in M$ lokálního extrému f na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že
  $$(1, -1) = \text{grad} f(a) = \lambda \cdot \text{grad}\Phi(a) = \lambda\Big(6x + 5y, 5x + 6y\Big)$$
  a
  $$3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1.$$
  Jelikož z rovnic plyne, že $\lambda \neq 0$, dostáváme rovnici $6x + 5y = \frac{1}{\lambda} = -(5x + 6y)$. Odsud plyne $x = -y$ a po dosazení do vazby získáme kandidáty na extrémy:
  $$(1, -1), \qquad (-1, 1)$$
  s hodnotami
  $$f(1, -1) = 5, \qquad f(-1, 1) = 1.$$

- Potřebujeme ještě zjistit, zda množina M je vůbec omezená (uzavřenost M plyne snadno z toho, že $M = \Phi^{-1}(\{0\})$, neboli že je to vzor uzavřené množiny $\{0\}$ při spojitém zobrazení Φ).

  Doplněním na čtverec
  $$1 = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 3\left(x + \frac{5}{6}y\right)^2 + \frac{11}{12}y^2$$
  zjistíme, že jde o omezenou množinu (konkrétně o (natočenou) elipsu). To lze zjistit i z toho, že kvadratická forma
  $$Q(x, y) = 3x^2 + 5xy + 3y^2 = (x, y)\begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$
  je pozitivně definitní (např. pomocí Sylvestrova kritéria).

- Spojitá funkce f tak na uzavřené a omezené množině M skutečně nabývá svého maxima v bodě $(1, -1)$ a minima v bodě $(-1, 1)$.



Poznámka: Úloha (a) je ekvivalentní tomu, když máme najít na implicitně zadané křivce $M: \; 3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$ body, kde tečna přímka je rovnoběžná s přímkou $x - y + 3 = 0$.

7.2 (vázané extrémy)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ za podmínky $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$. Načrtněte útvary určené touto vazbou.

Řešení:

Použijeme věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina $k \leq n$ a $f : U \to \mathbb{R}$ a $\Phi : U \to \mathbb{R}^k$ jsou spojitě diferencovatelná zobrazení na U. Položme

$$M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0 \;\&\; \Phi'(a) \text{ je regulární}\}.$$

Jestliže $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M, pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$f'(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g_i'(a_0),$$

kde g_i jsou jednotlivé složky zobrazení Φ, tj. $\Phi(a) = (g_1(a), \ldots, g_k(a))$.

(*Regularita* derivace znamená, že její matice má maximální možnou hodnost, tedy hodnost k, tj. její řádky jsou lineárně nezávislé. Množina M se pak nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných zobrazením Φ.)

Doplněním na čtverec snadno zjistíme, že vazba představuje kružnici

$$M: \quad (x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 3$$

tedy omezenou uzavřenou množinu. Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů pro

$$\Phi(x, y) = (x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 3 \;.$$

Protože

$$\Phi'(x, y) = \Big(2(x-1), 4(y+1)\Big)$$

tak $\Phi'(x,y)$ *není* regulární (tj. v tomto případě $\Phi'(x,y) = 0$) právě když $(x,y) = (1,-1)$. Nemůže se tedy stát, aby $\Phi(x,y) = 0$ a $\Phi'(x,y) = 0$. Takže v každém bodě množiny M je $\Phi'(x,y)$ regulární. Pro extrém $a = (x,y)$ na M tak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x, 4y) = f'(a) = \lambda \cdot \Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2(x-1), 4(y+1)\Big)$$

a

$$(x-1)^2 + 2(y+1)^2 = 3.$$

Vyjádříme $x = \frac{\lambda}{\lambda-1}$ a $y = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ pomocí λ (zřejmě $\lambda \neq 1$ jinak by rovnice neměly řešení) a dosadíme do vazby. Dostaneme $(\lambda-1)^2 = 1$ s řešením $\lambda \in \{0,2\}$ a kandidáty na extrémy:

$$(2,-2)\,, \qquad (0,0)$$

s hodnotami

$$f\,(2,-2) = 12, \qquad f\,(0,0) = 0.$$

Množina M je uzavřená a omezená a spojitá funkce f tak v těchto kandidátech skutečně nabývá svého maxima a minima.

7.3 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)
Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x,y) = x^2 - (y-1)^2$$

na množině

$$M: \quad y^2 \leq 1 - x^2.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:
Množina M je kruh o poloměru 1 se středem v počátku. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 + y^2 < 1$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 = 1\,.$$

Extrém na M°: Absolutní extrém na M° musí být lokální a tedy musí platit

$$(0,0) = \mathrm{d}f(x,y) = \big(2x,\ -2(y-1)\big)$$

což nastává právě když $(x,y) = (0,1)$. Tento bod ale neleží v M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x,y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(2x,\ -2(y-1)\Big) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Tedy má platit

$$x = x\lambda$$

$$1 - y = y\lambda\ .$$

Odsud máme, že buď je $x = 0$ nebo $\lambda = 1$. Z první možnosti a rovnice kružnice máme body $(0, \pm 1)$. Z druhé, tj. $\lambda = 1$ dostáváme $y = \frac{1}{2}$ a tudíž body $\left(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Jejich funkční hodnoty jsou:

$$f\big(0,1\big) = 0, \qquad f\big(0,-1\big) = -4$$

$$f\big(\pm\tfrac{\sqrt{3}}{2}, \tfrac{1}{2}\big) = \tfrac{1}{2}\ .$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak v těchto bodech nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\big(\pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\big)$ a minima v bodě $(0, -1)$.

7.4 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)

Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = 3xy$ na množině

$$M: \quad x^2 + y^2 \leq 2.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení:
Množina M je kruh o poloměru 2. Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 + y^2 < 2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad x^2 + y^2 = 2\ .$$

Extrém na M°: Absolutní extrém na M° musí být lokální a tedy musí platit

$$f'(x, y) = \big(3y,\ 3x\big) = (0, 0)$$

což nastává právě když $(x, y) = (0, 0)$. Máme tak podezřelý bod $(x, y) = (0, 0)$ s hodnotou $f(0, 0) = 0$.

Extrém na ∂M:

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Pro extrém $a = (x, y)$ na kružnici dané vazbovou funkcí

$$\Phi(x, y) = x^2 + y^2 - 2$$

existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(3y,\ 3x\big) = f'(a) = \lambda\Phi'(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 2y\Big)$$

a

$$x^2 + y^2 = 2.$$

Ani jedna z proměnných nemůže být nulová, takže máme $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}\lambda = \frac{y}{x}$, tedy $x^2 = y^2$. Dosazením do rovnice kružnice dostaneme kandidáty na extrémy:

$$\pm(1,-1), \quad \pm(1,1),$$

s odpovídajícími hodnotami

$$f\big(-1,1\big) = f\big(1,-1\big) = -3, \quad f\big(1,1\big) = f\big(-1,-1\big) = 3.$$

Množina M je uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na M nabývá svého maxima a minima.
Porovnáním hodnot podezřelých bodů dostáváme, že funkce nabývá svého maxima v bodech $\pm(1,1)$ a minima v bodech $\pm(1,-1)$.

7.5 (vázané extrémy na uzavřené množině s vnitřkem a hladkým okrajem)
Kruhový talíř o rovnici $x^2 + y^2 \le 1$ je zahřátý na teplotu $T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x$. Najděte nejteplejší a nejstudenější bod na talíři.

Řešení:
Vyšetření extrému T na uzavřené a omezené množině $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ rozdělíme na případ (volného) extrému na otevřené množině

$$A^\circ : \quad x^2 + y^2 < 1$$

a případ vázaného extrému na

$$\partial A : \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Extrém na A°:

Jestliže $a = (x,y) \in A^\circ$ je extrém T na A, pak je i lokálním extrémem T na A°. Takže musí platit, že

$$(0,0) = \mathrm{d}T(a) = (2x-1, 4y)$$

tedy $a = (\frac{1}{2}, 0)$ a tento bod skutečně patří do A°. Máme tedy první podezřelý bod.

Extrém na ∂A:

Jestliže $a = (x,y) \in \partial A$ je extrém T na A, pak je i (vázaným) extrémem T na

$$\partial A : \quad \Phi(x,y) = 0$$

kde $\Phi(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Musí tedy existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2x-1, 4y) = \mathrm{grad}T(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda(2x, 2y)$$

a

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Takže máme

$$\begin{array}{rcl} 2x-1 &=& \lambda 2x \\ 2y &=& \lambda y \\ x^2+y^2 &=& 1 \end{array} \quad \xRightarrow{(2-\lambda)y=0} \quad \begin{array}{l} y = 0: \quad x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm 1 \\ \\ \lambda = 2: \quad 2x - 1 = 2\cdot 2x \;\Rightarrow\; x = -\frac{1}{2} \quad \xRightarrow{y^2=1-x^2} \quad y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Dostáváme $a = \pm(1,0)$ nebo $a = (-\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2})$. Teď víme, že jedinými možnými kandidáty na extrémy jsou body

$$\left(\tfrac{1}{2},0\right),\ (1,0),\ (-1,0),\ \left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{a}\ \left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Protože T nabývá na (uzavřené a omezené) množině A extrému, porovnáním funkčních hodnot

$$T\left(\tfrac{1}{2},0\right) = -\tfrac{1}{4}, \quad T(1,0) = 0, \quad T(-1,0) = 2, \quad T\left(-\tfrac{1}{2},\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = \tfrac{9}{4} = T\left(-\tfrac{1}{2},-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

zjistíme, že T nabývá minima v $\left(\frac{1}{2},0\right)$ a maxima v $\left(-\frac{1}{2},\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

7.6 (extrémy pro po částech hladký okraj)
Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M: \quad x^2 \le y \le 4\ .$$

Řešení:
Množina M je část ležící nad parabolou a pod přímkou a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x^2 < y < 4$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l}(y = x^2 \quad \& \quad -2 \le x \le 2)\ \vee \\ (y = 4 \quad \& \quad -2 \le x \le 2)\end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka). POZOR: tyto dvě vazby ale NEPLATÍ současně! Každá vyjadřuje JINOU část okraje!

Extrém na M°:

$$(0,0) = \mathrm{d}f(x,y) = \left(6x^2 + 8x - 2y, 2y - 2x\right)$$

nastává (vzhledem k $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$y = 3x^2 + 4x$$

$$y = x\ .$$

Jediná řešení této soustavy $(0,0)$ a $(-1,-1)$ ale nepatří do M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Na obou křivkách můžeme použít Lagrangeovu větu, ale nejvhodnější bude zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• část paraboly parametrizujeme přirozeně pomocí

$$\varphi_1 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(t) = (t, t^2) \ .$$

Pokud $a = \varphi_1(t_0)$ je bodem extrému f na části paraboly, pak je t_0 extrémem funkce $f \circ \varphi_1$ a tedy musí být $(f \circ \varphi_1)'(t_0) = 0$. Tuto úvahu ovšem můžeme udělat právě jen proto, že t_0 je VNITŘNÍM bodem intervalu $(-2,2)$. Z tohoto důvodu MUSÍME při vyšetřování části paraboly vynechat její koncové body, kde navazuje na úsečku (tyto koncové body automaticky zařadíme do podezřelých bodů).

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_1(t) := f(\varphi_1(t)) = f(t, t^2) = 4t^2 + t^4 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2) \ .$$

Máme $g_1'(t) = 8t + 4t^3 = 0$ právě když $t = 0$. Podezřelým bodem tak je $(0,0) \in \partial M$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

• podobně úsečku parametrizujeme přirozeně pomocí OTEVŘENÉHO intervalu

$$\varphi_2 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_2(t) = (t, 4) \ .$$

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_2(t) := f(\varphi_2(t)) = f(t,4) = 2t^3 + 4t^2 - 8t + 16 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2) \ .$$

Rovnice $g_2'(t) = 6t^2 + 8t - 8 = 2(3t-2)(t+2) = 0$ má řešení pro $t = \frac{2}{3} \in (-2,2)$. Podezřelým bodem tak je $(\frac{2}{3}, 4) \in \partial M$ s hodnotou $f\left(\frac{2}{3}, 4\right) = \frac{16 \cdot 22}{27}$.

• zbývají už jen dva průsečíky křivek $(-2,4)$ a $(2,4)$ s hodnotami $f(-2,4) = f(2,4) = 32$, které taky zahrneme mezi podezřelé body.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (tj. $32 > \frac{16 \cdot 22}{27} > 0$) dostáváme, že funkce evidentně nabývá svého maxima v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$ a minima v bodě $(0,0)$.

7.7 (extrémy pro po částech hladký okraj)

Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 y(4 - x - y)$ na množině

$$M : \quad x \geq 0 \ \ \& \ \ y \geq 0 \ \ \& \quad x + y \leq 6 \ .$$

Řešení:
Množina M je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(6,0)$ a $(0,6)$ a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených polorovin).

Příklad opět rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x > 0 \ \ \& \ \ y > 0 \ \ \& \quad x + y < 6$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad \begin{array}{l} (y = 0 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 6) \ \ \vee \\ (x = 0 \ \ \& \ \ 0 \leq y \leq 6) \ \ \vee \\ (x + y = 6 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 6) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři otevřené úsečky (hraný trojúhelníky) a tři body (vrcholy trojúhelníků). Tyto vazby ale opět NEJSOU splněné SOUČASNĚ (což je vidět i tím, že používáme logickou spojku “NEBO”, nikoliv “A”).

Extrém na M°:

$$(0,0) = \mathrm{d}f(x,y) = \big(8xy - 3x^2y - 2xy^2, 4x^2 - x^3 - 2x^2y\big)$$

nastává (vzhledem k tomu, že $x, y > 0$) právě když je splněna soustava

$$8 = 3x + 2y$$

$$4 = x + 2y\ .$$

Tedy podezřelým bodem je řešení $a = (2,1) \in M^\circ$ s hodnotou $f(2,1) = 4$.

Extrém na ∂M:

Na obou odvěsnách trojúhelníku je funkce f identicky nulová, takže všechny tyto body prostě zařadíme do podezřelých bodů. Zbývá vyšetřit otevřenou úsečku, která představuje třetí stranu. Tentokrát ji prostě zparametrizujeme pomocí

$$\varphi(t) = (t, 6-t) \;\text{ pro }\; t \in (0,6)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g(t) := (f \circ \varphi)(t) = -2t^2(6-t) = 2t^3 - 12t^2$$

pro $t \in (0,6)$. Máme

$$g'(t) := 6t^2 - 24t = 6t(t-4) = 0$$

právě když $t = 4 \in (0,6)$ (zdůrazněme, že tento interval nutně musí být OTEVŘENÝ - jinak nemůžeme použít nutnou podmínku, tj. nulovost derivace). Tedy podezřelý bod je $a = (4,2)$ s hodnotou $f(4,2) = -64$.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů (zejména nezapomínejme na vrcholy trojúhelníku jako samostatné vazby, které nelze zařadit do ostatních vazeb, protože ty musí být definovány v rámci otevřených množin - opět proto, abychom mohli derivovat) dostáváme, že funkce tedy evidentně nabývá svého maxima v bodě $(2,1)$ a minima v bodě $(4,2)$.

7.8 (vázané extrémy - aplikace)
Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení:
Zadání příkladu lze interpretovat také tak, že hledáme maximální objem kvádru, který se vejde do pravidelného trojbokého jehlanu, jehož jeden vrchol je společný s vrcholem kvádrů. Intuitivně lze očekávat, že maximální takový objem bude odpovídat krychli.

Budeme tedy hledat body maxima funkce

$$f(x,y,z) = xyz$$

na množině

$$M = \{(x,y,z) \in U \mid \Phi(x,y,z) = 0\},$$

kde

$$U:\; x, y, z > 0$$

je otevřená množina a

$$\Phi(x, y, z) = x + y + z - 100$$

je vazbová funkce.

Protože U je OTEVŘENÁ (což je podstatné!) a $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq (0, 0, 0)$ pro každé $a \in M$, tak můžeme použít Langrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a = (x, y, z) \in M$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(yz, xz, xy) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda(1, 1, 1)$$

a

$$x + y + z = 100 \ .$$

Odsud máme např. že $yz = \lambda = xz$ a protože $z > 0$, tak dostaneme $x = y$. Podobně odvodíme, že $x = y = z$ a tedy $x + x + x = 100$. Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a = \left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right) = \left(\frac{100}{3}\right)^3$.

Abychom mohli využít věty o nabytí extrémů, potřebujeme ale uzavřenou množinu, což M není (je to trojúhelník, ale bez hran). Tak si M prostě uzavřeme, čímž dostaneme

$$\overline{M} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0 \quad \& \quad \Phi(x, y, z) = 0\},$$

což je trojúhelník i s hranami. Na těchto přidaných hranách je ale funkce f nulová (a tudíž snadno uchopitelná), takže všechny hrany můžeme zařadit mezi podezřelé body z extrémů na $\overline{M}$. Tím jsme prošli všechny body $\overline{M}$.

Množina $\overline{M}$ je teď už uzavřená a omezená, takže spojitá funkce f zde nabývá svých extrémů. Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech teď snadno dostáváme, že na hranách nabývá f svého minima a v bodě $\left(\frac{100}{3}, \frac{100}{3}, \frac{100}{3}\right)$ svého (jediného) maxima (jak jsme očekávali).