8. cvičení z Matematické analýzy 2

7. - 11. listopadu 2022

8.1 (vázané extrémy - aplikace)

Do úseče eliptického paraboloidu $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ vymezené rovinou $z = 1$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení:

Vzhledem k symetriím stačí vyšetřit případ, kdy čtvrtina kvádru leží v množině $x, y, z \geq 0$. Tato část je jednoznačně určena svým vrcholem (x, y, z), který leží v množině:

$$M: \quad z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \ \ \& \ \ 0 \leq x, y \ \ \& \ \ 0 \leq z \leq 1$$

objem této části je pak dán hodnotou

$$f(x, y, z) = xy(1 - z) \ .$$

Hledáme tedy maximum f na M. Množina M je uzavřená (je to průnik uzavřených množin) a omezená (jak se snadno nahlédne). K použití věty o Langrangeových multiplikátorech potřebujeme ale množinu tvaru $\{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$, kde speciálně U je OTEVŘENÁ množina v $\mathbb{R}^3$. Množinu M proto rozdělíme na

$$M_1: \quad \underbrace{0 < x, y \ \& \ 0 < z < 1}_{=:U} \ \ \& \ \ \Phi(x, y, z) = 0$$

a

$$M_2: \quad (x = 0 \ \vee \ y = 0 \ \vee \ z = 0 \ \vee \ z = 1) \ \ \& \ \ 0 \leq x, y \ \ \& \ \ 0 \leq z \leq 1 \ \ \& \ \ \Phi(x, y, z) = 0$$

kde $\Phi(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} - z$ je vazbová funkce.

Pro body extrémů na M_1 můžeme teď použít Lagrangeovu podmínku (protože pro $a \in M_1$ je $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq (0, 0, 0)$, jak bude vidět). Tedy budeme tu mít $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(y(1 - z), \ x(1 - z), \ -xy\Big) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda\Big(x, \ \tfrac{2}{3}y, \ -1\Big)$$

a

$$z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \ .$$

Protože na U jsou hodnoty x, y a $1 - z$ nenulové, můžeme vydělit první rovnici třetí rovnicí a také druhou rovnici opět třetí rovnicí:

$$\begin{array}{rcl} y(1 - z) & = & \lambda x \\ x(1 - z) & = & \lambda \frac{2}{3} y \\ xy & = & \lambda \\ z & = & \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \end{array} \quad \xRightarrow{\text{vydělení rovnic}} \quad \begin{array}{c} 1 - z = x^2 \\ 1 - z = \frac{2}{3} y^2 \\ z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} \end{array} \quad \xRightarrow[y^2/3 = (1 - z)/2]{x^2 = 1 - z}$$

$$\Longrightarrow \quad z = \frac{1 - z}{2} + \frac{1 - z}{2} \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1}{2} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} x^2 = 1 - z = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{3}{2}(1 - z) = \frac{3}{4} \end{array} \quad \xRightarrow{x, y > 0} \quad \begin{array}{c} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}$$

Jediný podezřelý bod na M_1 je tedy $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{6}}{8}$.

Na množině M_2 je funkce f konstantně nulová, takže celou M_2 můžeme zařadit mezi podezřelé body. Porovnáním funkčních hodnot (a tím, že f nabývá extrémů na M), pak ihned máme, že kvádr s maximálním objemem je určen vrcholem $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (a jeho symetrickými protějšky na eliptickém paraboloidu).

8.2 (vázané extrémy - aplikace)

Do úseče kužele $1 - z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ vymezené rovinou $z = 0$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu: Vzhledem k symetriím stačí vyšetřit případ, kdy čtvrtina kvádru leží v množině $x, y, z \geq 0$. Tato část je jednoznačně určena svým vrcholem (x, y, z), který leží v množině:

$$M: \quad (1-z)^2 = x^2 + 2y^2 \;\;\&\;\; 0 \leq x, y \;\;\&\;\; 0 \leq z \leq 1$$

objem této části je pak dán hodnotou

$$f(x, y, z) = xyz \; .$$

Hledáme tedy maximum f na M. Množina M je uzavřená (je to průnik uzavřených množin) a omezená (jak se snadno nahlédne). K použití věty o Langrangeových multiplikátorech potřebujeme ale množinu tvaru $\{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$, kde U je OTEVŘENÁ množina v $\mathbb{R}^3$. Množinu M proto rozdělíme na

$$M_1: \quad \underbrace{0 < x, y \;\&\; 0 < z < 1}_{=:U} \;\;\&\;\; \Phi(x, y, z) = 0$$

a

$$M_2: \quad (x = 0 \;\vee\; y = 0 \;\vee\; z = 0 \;\vee\; z = 1) \;\;\&\;\; 0 \leq x, y \;\;\&\;\; 0 \leq z \leq 1 \;\;\&\;\; \Phi(x, y, z) = 0$$

kde $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - (z-1)^2$ je vazbová funkce.

Pro body extrémů na M_1 můžeme teď použít Lagrangeovu podmínku (protože pro $a \in M_1$ je $\mathrm{grad}\Phi(a) \neq (0, 0, 0)$, jak bude vidět). Tedy budeme tu mít $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(yz,\; xz,\; xy\Big) = \mathrm{grad} f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda\Big(2x,\; 4y,\; 2(1-z)\Big)$$

a

$$(z-1)^2 = x^2 + 2y^2 \; .$$

Protože na U jsou hodnoty x, y a $1 - z$ nenulové, můžeme vydělit první rovnici třetí rovnicí a také druhou rovnici opět třetí rovnicí:

$$\begin{array}{rcl} yz & = & \lambda 2x \\ xz & = & \lambda 4y \\ xy & = & \lambda 2(1-z) \\ (z-1)^2 & = & x^2 + 2y^2 \end{array} \quad \overset{\text{vydělení rovnic}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} z(1-z) = x^2 \\ z(1-z) = 2y^2 \\ (z-1)^2 = x^2 + 2y^2 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (z-1)^2 = z(1-z) + z(1-z) \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} x^2 = z(1-z) = \frac{2}{9} \\ y^2 = \frac{1}{2}z(1-z) = \frac{1}{9} \end{array} \quad \overset{x,y>0}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} x = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{array}$$

Jediný podezřelý bod na M_1 je tedy $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{27}$.

Na množině M_2 je funkce f konstantně nulová, takže celou M_2 můžeme zařadit mezi podezřelé body.

Porovnáním funkčních hodnot (a tím, že f nabývá extrémů na M), pak ihned máme, že kvádr s maximálním objemem je určen vrcholem $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (a jeho symetrickými protějšky na eliptickém kuželu).

8.3 (vázané extrémy - aplikace)

Určete rozměry pravoúhlého odkrytého bazénu, který má při daném objemu V minimální povrch.

Řešení:

Nechť bazén má dno s rozměry $x, y > 0$ a výšku $z > 0$. Budeme tedy hledat minimum funkce

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

na množině

$$M = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\},$$

kde

$$U : \ x, y, z > 0$$

je otevřená množina a

$$\Phi(x, y, z) = xyz$$

je vazbová funkce.

Protože U je OTEVŘENÁ a $\mathrm{grad}\Phi(a) = (yz, xz, xy) \neq (0, 0, 0)$ pro každé $a \in M$, tak můžeme použít Langrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a = (x, y, z) \in M$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(y + 2z, x + 2z, 2x + 2y) = \mathrm{grad}f(a) = \lambda \cdot \mathrm{grad}\Phi(a) = \lambda(yz, xz, xy)$$

a

$$xyz = V \ \& \ x, y, z > 0 \ .$$

Máme tak rovnice:

$$\begin{array}{rcl} y + 2z &=& \lambda yz \\ x + 2z &=& \lambda xz \\ 2x + 2y &=& \lambda xy \\ xyz &=& V \end{array} \quad \xRightarrow{\text{vynásobení rovnic vhodnou proměnnou}} \quad \begin{array}{rcl} xy + 2xz &=& \lambda xyz = \lambda V \\ xy + 2yz &=& \lambda xyz = \lambda V \\ 2xz + 2yz &=& \lambda xyz = \lambda V \\ xyz &=& V \end{array}$$

Z prvních dvou rovnic máme $xy + 2xz = \lambda V = xy + 2yz$, tedy $x = y$. Z druhé a třetí rovnice máme $xy + 2yz = \lambda V = 2xz + 2yz$, tedy $y = 2z$. Po dosazení $x = y = 2z$ do čtvrté rovnice máme $V = 2z \cdot 2z \cdot z$, tedy $z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$.

Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a = \left(2\sqrt[3]{\frac{V}{4}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{4}}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right)$.

Množina M je uzavřená (je to průnik uzavřené množiny dané rovností $V = xyz$ a uzavřené množiny dané neostrými nerovnostmi $x, y, z \geq 0$), ale NENÍ omezená. Potřebujeme tedy využít:

Větu o nabytí globálního minima: Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na uzavřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť dále platí

$$(\forall\ n \in \mathbb{N})(\exists\ K > 0)(\forall\ a \in M) \quad \|a\| \geq K \Rightarrow f(a) \geq n$$

(tj. jestliže se s bodem a vzdalujeme od počátku, jde hodnota $f(a)$ do plus nekonečna).
Pak funkce f nabývá na M svého globálního minima.

Ověření podmínky po funkci f chce menší trik: pro body $a = (x, y, z) \in M$ máme s využitím podmínek $x, y, z > 0$ a $xyz = V$, že

$$\big(f(a)\big)^2 = (xy + 2yz + 2xz)^2 \geq (xy + yz + xz)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2y^2 + 2xyz(x + y + z) \geq$$

$$\geq 2V(x + y + z) \geq 2V\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2V\|a\| \ .$$

Celkově tedy $\big(f(a)\big)^2 \geq 2V\|a\|$ a tudíž $f(a) \geq \sqrt{2V} \cdot \sqrt{\|a\|}$. Tedy pokud nyní pro $a \in M$ bude $\|a\|$ dostatečně velké, bude dostatečně velká i hodnota $f(a)$.
Z této věty tedy vidíme, že nalezený podezřelý bod je skutečně bodem minima funkce f na M.

8.4 (vázané extrémy - vzdálenost)
Vypočtěte vzdálenost nejbližšího bodu hyperboly $M: \ x^2 + 5xy + y^2 = 9$ od počátku $(0, 0)$.

Řešení:
Hyperbole je uzavřená množina, ale NENÍ omezená. Ke zjištění vzdálenosti od počátku $(0, 0)$ si vezmeme funkci

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

protože se čtvercem vzdálenosti se lépe pracuje. Tato funkce "v nekonečnu roste do nekonečna" (tj. splňuje podmínky o nabytí globálního minima na M). Kandidáta na minimum můžeme opět najít metodou Lagr. multiplikátorů.
Máme tedy $f(x, y) = x^2 + y^2$ a vazbovou funkci $g(x, y) = x^2 + 5xy + y^2 - 9$. Pro bod $a = (x, y) \in M$ lokálního extrému f na M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x, 2y\big) = f'(a) = \lambda \cdot g'(a) = \lambda\Big(2x + 5y, 5x + 2y\Big)$$

a

$$x^2 + 5xy + y^2 = 9.$$

Z prvního vztahu dostaneme

$$\begin{pmatrix} 2(\lambda - 1) & 5\lambda \\ 5\lambda & 2(\lambda - 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Protože pro bod $(x, y) \in M$ je $(x, y) \neq (0, 0)$, tak vektorová rovnice je řešitelná právě když determinant čtvercové matice je nula. Neboli

$$0 = (2(\lambda - 1))^2 - (5\lambda)^2 = (2\lambda - 2 - 5\lambda) \cdot (2\lambda - 2 + 5\lambda) = (-3\lambda - 2) \cdot (7\lambda - 2)$$

tedy $\lambda = -\frac{2}{3}$ nebo $\lambda = \frac{2}{7}$. Dosazením dostaneme $x = \pm y$ a z rovnice $x^2 + 5xy + y^2 = 9$ pak máme podezřelé body

$$a_0 = (x, y) = \pm\left(\tfrac{3}{\sqrt{7}}, \tfrac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

s hodnotou $f(a_0) = \frac{18}{7}$. Podle věty o nabývání minima je tato hodnota skutečně minimální, takže vzdálenost bodu $(0, 0)$ od hyperboly je $\sqrt{\frac{18}{7}}$.

Na úlohu lze také nahlížet geometricky: hledáme takový bod $(x, y) \in M$, aby jeho průvodič z počátku $(0, 0)$, tj. vektor $\vec{h} = (x, y) - (0, 0)$ byl kolmý na tečnou přímku k M v bodě (x, y). Tato tečná přímka má za normálový vektor $\operatorname{grad} g(x,y)$. Musíme tedy vyřešit systém podmínek $\vec{h} = \lambda \cdot \operatorname{grad} g(x,y)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ a $(x,y) \in M$. A to už je totéž jako výše.

Fubiniho věta: Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na vnitřku E° oblasti E a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint\limits_E |f|\ dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená a oblast E je také omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint\limits_E f\ dS$ a platí

$$\iint\limits_E f\ dS = \int\limits_{\pi_2(E)} \left(\int\limits_{\substack{\textit{(vodorovný) řez množinou } E\\ \textit{pomocí přímky } \mathbb{R}\times\{y\}}} f(x,y)\ dx \right) dy$$

$$\iint\limits_E f\ dS = \int\limits_{\pi_1(E)} \left(\int\limits_{\substack{\textit{(svislý) řez množinou } E\\ \textit{pomocí přímky } \{x\}\times\mathbb{R}}} f(x,y)\ dy \right) dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

8.5 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Změňte pořadí integrace v integrálu

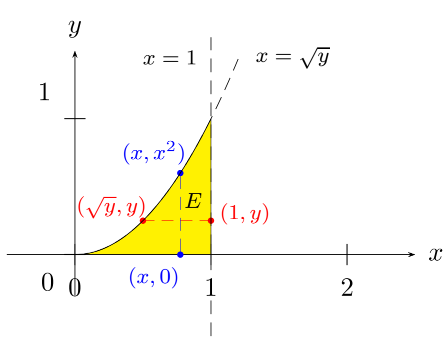
(i) $\int\limits_0^1 \int\limits_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\ dx\ dy$,

(ii) $\int\limits_0^\pi \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx$.

Řešení:
V těchto příkladech procvičujeme jen záměnu integrace, takže předpokládáme, že funkce f předpoklady Fubiniho věty splňuje.

(a) Základní oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad \sqrt{y} \le x \le 1.$$



Po rozřezání oblasti E ve směru osy y máme

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^2.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} f(x,y)\ dy\ dx.$$

(b) Základní oblast integrace je

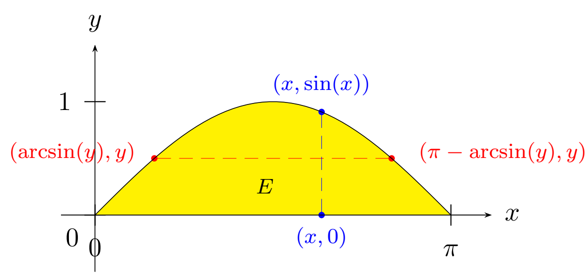
$$E: \quad 0 \le x \le \pi \quad \& \quad 0 \le y \le \sin x.$$

Máme

$$\pi_1(E) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap E = \{x\} \times \langle 0, \sin x \rangle.$$



Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(E) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x vidíme, že pro $y \in \langle 0, 1 \rangle$ protíná přímka $\mathbb{R} \times \{y\}$ křivku $y = \sin(x)$ pro hodnoty $x_1 = \arcsin(y)$ (tj. $x_1 \in (0, \frac{\pi}{2})$) a pro $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \arcsin(y)$.

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^\pi \int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x,y)\ dx\ dy.$$

8.6 (dvojný integrál - Fubiniho věta)

Vypočítejte hodnotu integrálu:

(a)

$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\, dxdy$$

kde E je trojúhelník s vrcholy $(0,0), (1,0), (1,1)$.

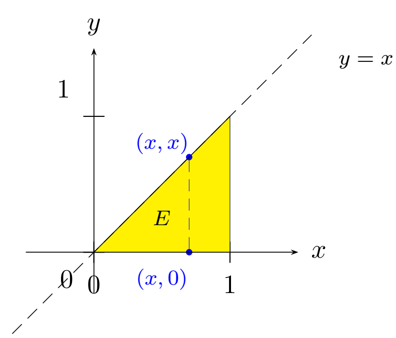
(b)
$$\iint_E e^{y^3}\sqrt{xy-y^2}\;dS,$$
kde oblast E je omezená přímkami $y=x$, $x=10y$ a $y=1$.

(c)
$$\iint_E e^{\frac{x}{y}}\;dS,$$
kde oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$.

(d)
$$\iint_E \frac{1}{y^4+1}\;dS$$
kde oblast E je omezena křivkami $x=y^3$, $y=2$ a $x=0$.

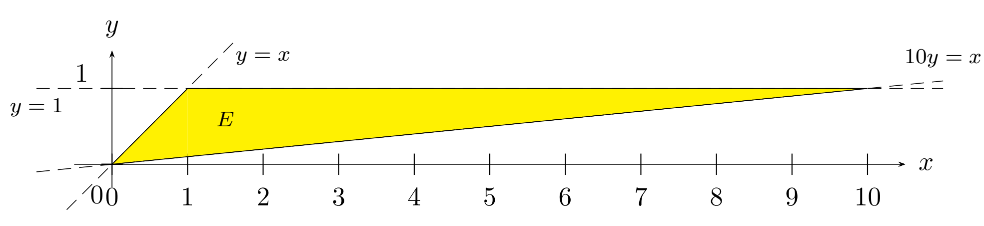
Řešení:

(a) Oblast integrace je
$$E:\quad 0\le x\le 1 \quad \& \quad 0\le y\le x\ .$$



Máme
$$\iint_E \frac{\sin x}{x}\,dxdy=\int_0^1\int_0^x \frac{\sin x}{x}\;dy\;dx=\int_0^1 \sin x\;dx=1-\cos(1).$$

(b) Oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(10,1)$ a pro výraz pod odmocninou tak máme $xy-y^2=y(x-y)\ge 0$.



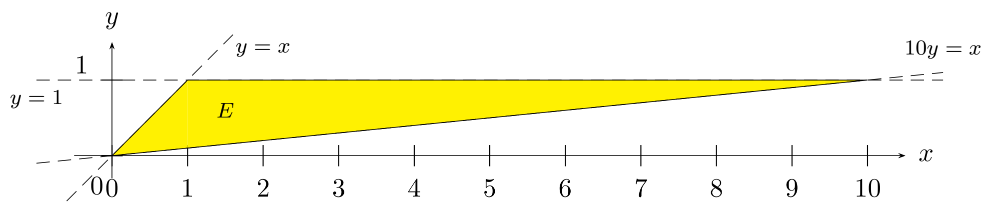
Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad y \le x \le 10y$$

$$\iint\limits_E e^{y^3}\sqrt{xy-y^2}\; dS = \int\limits_0^1 \int\limits_y^{10y} e^{y^3}\sqrt{xy-y^2}\; dx\; dy = \int\limits_0^1 \left[e^{y^3}\frac{2}{3}\cdot\frac{(xy-y^2)^{3/2}}{y}\right]_{x=y}^{x=10y} dy =$$

$$= \int\limits_0^1 e^{y^3}\frac{2}{3}\cdot\frac{(9y^2)^{3/2}}{y}\; dy = 6\int\limits_0^1 3y^2 e^{y^3}\; dy = 6\Big[e^{y^3}\Big]_{y=0}^{y=1} = 6(e-1)\ .$$

(c) Oblast E je trojúhelník:



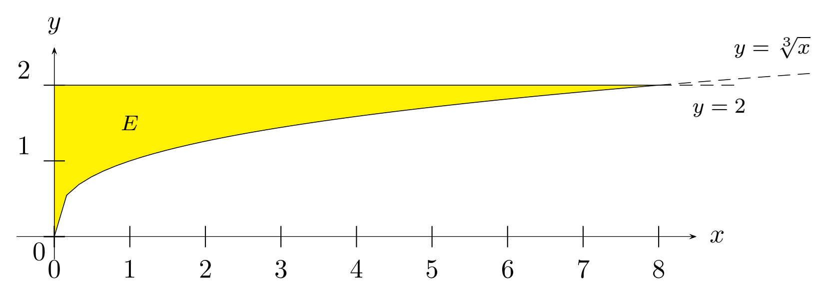
Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad y \le x \le 10y$$

$$\iint\limits_E e^{\frac{x}{y}}\; dS = \int\limits_0^1 \int\limits_y^{10y} e^{\frac{x}{y}}\; dx\; dy = \int\limits_0^1 \left[y e^{\frac{x}{y}}\right]_{x=y}^{x=10y} dy = \int\limits_0^1 y\left(e^{10}-e\right)\; dy = \frac{1}{2}\left(e^{10}-e\right)\ .$$

Poznámka: Vyšetříme si ještě pro pořádek chování f na E v bodě $(0,0)$. Protože pro $(x,y)\in E$ máme $y \le x \le 10y$ a $0<y$, tak $1 \le \frac{x}{y} \le 10$ a tedy $e^1 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^{10}$. Funkce f je proto na $E\setminus\{(0,0)\}$ omezená, kladná a spojitá a integrál na celé E tedy existuje a je konečný.

(d) Oblast je tvaru (viz obrázek).



Výhodnější bude funkci nejdříve integrovat podle proměnné x. Takže

$$E: \quad 0 \le y \le 2 \quad \& \quad 0 \le x \le y^3,$$

a dostáváme tak

$$\iint\limits_E \frac{1}{y^4+1}\;dy\;dx = \int\limits_0^2 \Big(\int\limits_0^{y^3} \frac{1}{y^4+1}\;dx\Big)\;dy = \int\limits_0^2 \frac{y^3}{y^4+1}dy =$$

$$= \Big[\frac{\ln(y^4+1)}{4}\Big]_{y=0}^{y=2} = \frac{\ln 17}{4}.$$

Těžiště tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^2$ o (nezáporné) hustotě $\varrho(x,y) : E \to \mathbb{R}$ se definuje jako bod $T = (T_1, T_2) \in \mathbb{R}^2$ kde

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint\limits_E x \cdot \varrho(x,y)\;\mathrm{d}S,$$

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint\limits_E y \cdot \varrho(x,y)\;\mathrm{d}S,$$

a $m = \iint\limits_E \varrho(x,y)\;\mathrm{d}S$ je hmotnost tohoto tělesa.

8.7 Určete těžiště

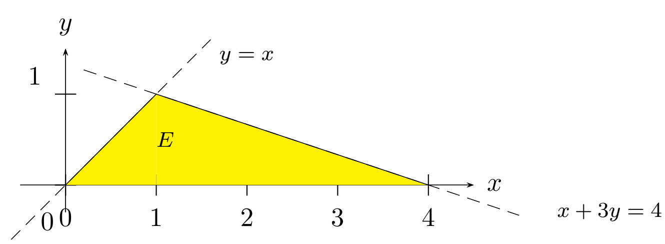
(i) trojúhelníku s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$, $(4,0)$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = x$.

(ii) útvaru omezeného křivkami $xy = 1$ a $x + y = \frac{5}{2}$, jehož plošná hustota je $\varrho(x,y) = 1$.

Řešení:
Oblast E je ve všech případech konvexní, takže těžiště bude ležet v E. Je dobré si vždy u výsledků tuto vlastnost v případě konvexních množin zkontrolovat.

(a) Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1, \qquad y \le x \le 4 - 3y.$$



Jednotlivé integrály tedy jsou
hmotnost:

$$m = \iint\limits_E \varrho\;dS = \int\limits_0^1 \Big(\int\limits_y^{4-3y} x\;dx\Big)\;dy = \int\limits_0^1 \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_{x=y}^{x=4-3y}\;dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (3y-4)^2 - y^2\;dy = \frac{1}{2}\Big[\frac{(3y-4)^3}{9} - \frac{y^3}{3}\Big]_0^1 = \frac{10}{3}$$

x-ová souřadnice těžiště:

$$T_1 = \frac{1}{m} \iint_E x\varrho(x,y)\ dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} x^2\ dx \Big)\ dy = \frac{1}{10} \int_0^1 \Big[x^3 \Big]_{x=y}^{x=4-3y}\ dy =$$

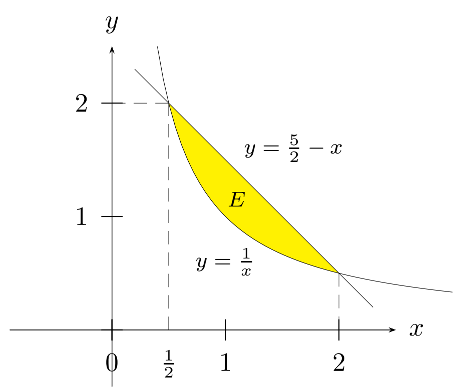
$$= \frac{1}{10} \int_0^1 (4-3y)^3 - y^3\ dy = \Big[-\frac{(4-3y)^4}{120} - \frac{y^4}{40} \Big]_0^1 = \frac{21}{10}$$

y-ová souřadnice těžiště:

$$T_2 = \frac{1}{m} \iint_E y\varrho(x,y)\ dS = \frac{3}{10} \int_0^1 \Big(\int_y^{4-3y} xy\ dx \Big)\ dy = \frac{3}{20} \int_0^1 \Big[x^2 y \Big]_{x=y}^{x=4-3y}\ dy =$$

$$= \frac{3}{20} \int_0^1 y(4-3y)^2 - y^3\ dy = \frac{6}{5} \int_0^1 y^3 - 3y^2 + 2y\ dy = \frac{6}{5} \Big[\frac{y^4}{4} - y^3 + y^2 \Big]_0^1 = \frac{3}{10}.$$

(b) Oblast E je vnitřní část hyperboly $xy = 1$ která je oříznutá přímkou $x + y = \frac{5}{2}$.



Potřebujeme zjistit rozsah proměnných neboli průniky hyperboly s přímkou:

$$\Big(xy = 1 \quad \wedge \quad x + y = \frac{5}{2} \Big) \quad \Leftrightarrow \quad \Big((x,y) = \big(\tfrac{1}{2}, 2\big) \quad \vee \quad (x,y) = \big(2, \tfrac{1}{2}\big) \Big)$$

Množinu E tedy zapíšeme jako

$$E: \quad \tfrac{1}{2} \le x \le 2 \ \ \& \ \ \tfrac{1}{x} \le y \le \tfrac{5}{2} - x$$

Vzhledem k symetrii E budeme mít $T_1 = T_2$.
hmotnost:

$$m = \iint_E \varrho\ dS = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \Big(\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} 1\ dy \Big)\ dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2} - x - \frac{1}{x}\ dx = \frac{15}{4} - \Big[\frac{x^2}{2} + \ln x \Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{15}{8} - 2\ln 2$$

$$T_1 = T_2 = \frac{1}{m} \iint\limits_E x\varrho(x,y)\ dS = \frac{1}{m} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \Big(\int\limits_{\frac{1}{x}}^{\frac{5}{2}-x} x\ dy \Big)\ dx = \frac{1}{m} \int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{5}{2}x - x^2 - 1\ dx =$$

$$= \frac{1}{m} \Big[\frac{5x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + x \Big]_{\frac{1}{2}}^{2} = \frac{1}{m} \frac{9}{16} = \frac{9}{30 - 32 \ln 2} \doteq 1.151\ .$$