9. cvičení z Matematické analýzy 2

14. - 18. listopadu 2022

Věta o substituci: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det(\mathrm{d}\Phi) \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iint\limits_{\Phi(U)} f(x,y)\ dx\ dy = \iint\limits_{U} (f \circ \Phi)(\alpha,\beta) \cdot |\det(\mathrm{d}\Phi(\alpha,\beta))|\ d\alpha\ d\beta.$$

9.1 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)

Vyjádřete integrál

$$\iint\limits_{E} f(x,y)\ dx\ dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblasti

(a) E, která je plochou trojúhelníka s vrcholy $(1,0)$, $(2,0)$ a $(1,1)$.

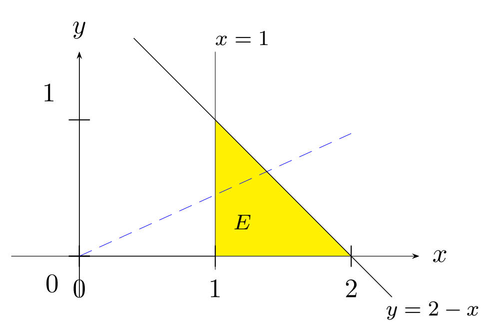
(b) $E: \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \& \quad x^2 \leq y \leq 1.$

Řešení:

Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné ϱ.

(a) Oblast E je trojúhelník ohraničený přímkami $x = 1$, $y = 0$ a $x + y = 2$ a dá se popsat také jako

$$E: \quad 1 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 2 - x$$



Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\, d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ, což je $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$. Pro pevně zvolené φ teď určíme rozsah proměnné ϱ. Ten je ze zdola určený přímkou $x = 1$ a shora přímkou $x + y = 2$. Po dosazení $x = \varrho \cos\varphi$ a $y = \varrho \sin\varphi$ do těchto rovnic pak máme omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\cos\varphi + \varrho\sin\varphi = x + y = 2 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varrho}$$

a zdola pomocí

$$\varrho\cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

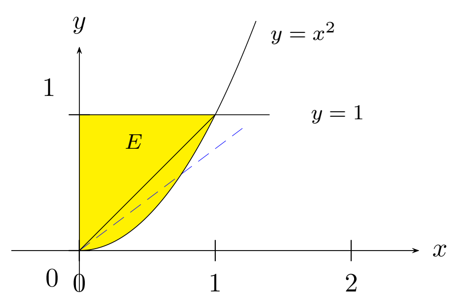
Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4} \quad \& \quad \frac{1}{\cos\varphi} \le \varrho \le \frac{2}{\cos\varphi + \sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{\pi/4} \int_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi+\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

(b) Postupujeme podobně jako v (a). Oblast E je potřeba rozdělit na dvě části podle předpisu hraničních křivek - jedna je $y = x^2$ a druhá $y = 1$.



Po dosazení polárních souřadnic pak máme v jedné části omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\sin\varphi = y = x^2 = \varrho^2\cos^2\varphi \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

a v druhé

$$\varrho\sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \quad \left(0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right) \vee$$
$$\vee \left(\tfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{1}{\sin\varphi}\right)$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_0^{\pi/4} \int_0^{\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi + \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\ d\varrho\ d\varphi\ .$$

9.2 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)
Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy$$

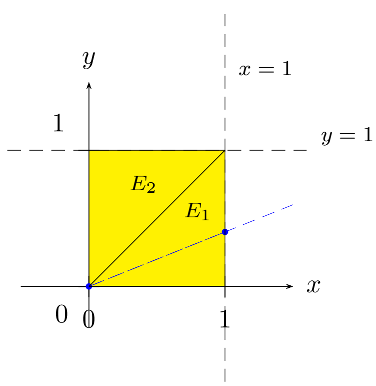
v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblasti

(a) $E = \langle 0,1\rangle^2$,

(b) $E:\quad 0 \le y \le 1 - x^2$.

Řešení:
Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné ϱ.

(a) Rozsah proměnné φ je $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Proměnná ϱ pak běží od 0 až po hrany čtverce, které jsou určené různými předpisy $x = 1$ a $y = 1$. Proto je potřeba E rozdělit podle toho na dva trojúhelníky E_1 a E_2 a každý vyjádřit zvlášť.



Po dosazení polárních souřadnic pak máme v části E_1 omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\cos\varphi}$$

a v části E_2 je pak omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho\sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{1}{\sin\varphi}\ .$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

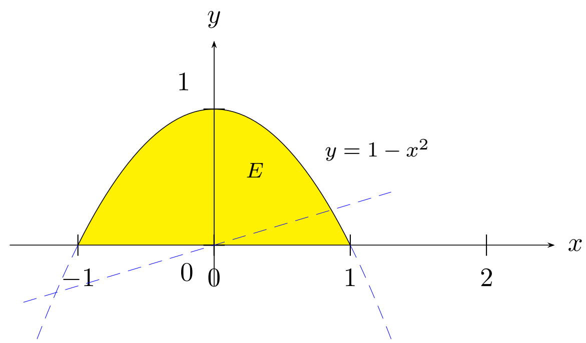
$$U: \qquad \left(0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{1}{\cos\varphi}\right) \vee$$

$$\vee \left(\tfrac{\pi}{4} \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \tfrac{1}{\sin\varphi}\right)$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\; dx\; dy = \int\limits_0^{\pi/4} \int\limits_0^{\frac{1}{\cos\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\; d\varrho\; d\varphi + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \int\limits_0^{\frac{1}{\sin\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\; d\varrho\; d\varphi\ .$$

(b) Množina E je plocha pod parabolou.



Rozsah proměnné φ tak bude $0 \le \varphi \le \pi$. Proměnná ϱ pak běží od 0 až po parabolu

$$y = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y - 1 = 0\ .$$

Po dosazení polárních souřadnic pak máme omezení proměnné ϱ shora pomocí

$$\varrho^2\cos^2\varphi + \varrho\sin\varphi - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{-\sin\varphi \pm \sqrt{\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}\ .$$

Protože $\varrho \ge 0$ tak (i z náčrtu) máme, že ten správný kořen je ten s volbou znaménka $+$ a ještě si to můžeme zjednodušit pomocí

$$\sin^2\varphi + 4\cos^2\varphi = (1-\cos^2\varphi) + 4\cos^2\varphi = 1 + 3\cos^2\varphi$$

Parametrizace U oblasti E v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \frac{-\sin\varphi + \sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\; dx\; dy = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\frac{-\sin\varphi+\sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}} \varrho \cdot f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\; d\varrho\; d\varphi\ .$$

Jak to bude s tím druhým kořenem ϱ, který nám vyšel? Ten bude odpovídat druhému průsečíku přímky s parabolou. Ukažme si to podrobněji. Jestliže máme např. $\varphi \in (0,\pi)$, pak protější bod odpovídá úhlu $\varphi' = \varphi + \pi \in (\pi, 2\pi)$. Pro ten opět dostaneme rovnici

$$\varrho^2 \cos^2\varphi' + \varrho \sin\varphi' - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varrho = \frac{-\sin\varphi' \pm \sqrt{1+3\cos^2\varphi'}}{2\cos^2\varphi'} \; .$$

kde opět pouze pro znaménko " + " vychází $\varrho \geq 0$. To vypadá, že se ten kořen se znaménkem " − " opět někde ztratil. Ve skutečnosti však máme

$$\frac{-\sin\varphi' + \sqrt{1+3\cos^2\varphi'}}{2\cos^2\varphi'} = \frac{-\sin(\varphi+\pi) + \sqrt{1+3\cos^2(\varphi+\pi)}}{2\cos^2(\varphi+\pi)} = \frac{\sin\varphi + \sqrt{1+3\cos^2\varphi}}{2\cos^2\varphi}$$

což je přesně ten druhý případ (až na celkové znaménko) z prvního výpočtu.

9.3 (polární souřadnice)
Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx,$$

(b)

$$\int_{0}^{1} \int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \, dx$$

Řešení:
Polární souřadnice je vhodné používat vzhledem když množina a/nebo funkce vykazují rotační symetrii. Je to transformace s předpisem

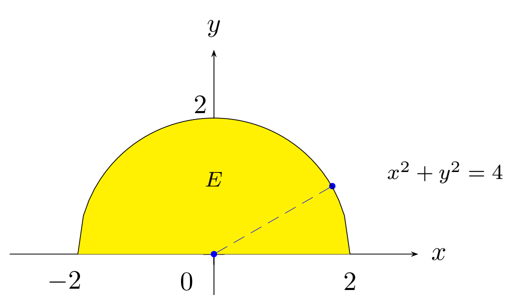
$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \end{array}$$

jejíž jakobián je $\det \Phi' = r$.

(a) Oblast integrace je

$$E : \quad -2 \leq x \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$$

což je půlkruh o poloměru 2 v horní polorovině a se středem v počátku.



Jeho parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U : \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le r \le 2 \; .$$

takže máme

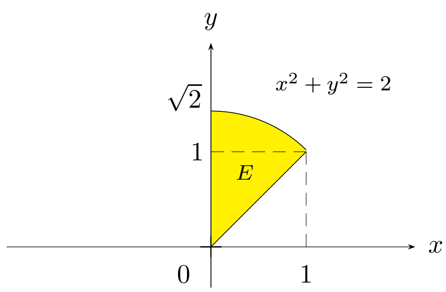
$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dy \; dx = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \; dS = \iint_{U} r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi)}_{=\cos 2\varphi} \; dr \; d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 r^2 \; dr \right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \cos 2\varphi \; d\varphi \right)}_{=0} = 0 \; .$$

(b) Oblast integrace je

$$E : \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le \sqrt{2 - x^2}$$

což je kruhová výseč.



Její parametrizace $E = \Psi(U)$ ve sférických souřadnicích je tvaru

$$U : \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \; .$$

Takže máme

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; dy \; dx = \iint_{E=\Psi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \; dS = \iint_U r\cos\varphi \; dr \; d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi \; dr \; d\varphi = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r \; dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \; d\varphi \right) = 1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \; .$$

Poznámka: Použili jsme vztah

$$\iint_{X \times Y} f(x)g(y) \; dV = \Big(\int_X f(x) \; dx \Big) \cdot \Big(\int_Y g(y) \; dy \Big)$$

pro integrabilní funkce $f : X \to \mathbb{R}$ a $g : Y \to \mathbb{R}$.

9.4 (plocha zadaná v polárních souřadnicích)
Vypočítejte integrál

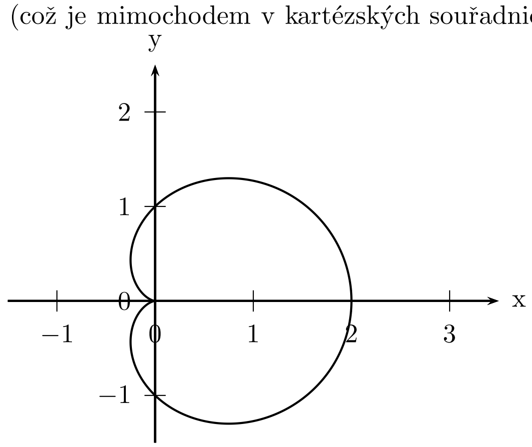
$$\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\; dS$$

použitím polárních souřadnic, kde D je ohraničeno křivkou $r = 1 + \cos\varphi$.

Řešení:
V polárních souřadnicích (viz předchozí příklad) je oblast dána jako

$$U: \qquad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1 + \cos\varphi$$

položíme tedy $D := \Phi(U)$ (což je mimochodem v kartézských souřadnicích plocha ohraničená křivkou nazývanou *kardioida*).



Použitím věty o substituci dostaneme

$$\iint_{D=\Phi(U)} \sqrt{x^2+y^2}\; dS = \iint_U r \cdot r\; dS =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^{1+\cos\varphi} r^2\; dr \Big)\; d\varphi = \int_0^{2\pi} \Big[\frac{r^3}{3}\Big]_{r=0}^{r=1+\cos\varphi}\; d\varphi = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (1+\cos\varphi)^3\; d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} (\cos^3\varphi + 3\cos^2\varphi + 3\cos\varphi + 1)\; d\varphi = \pi + \frac{2}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi.$$

Poznámka: Z periodicity a lichosti funkcí plyne, že $\int_0^{2\pi} \cos^{2n+1}\varphi\; d\varphi = 0$ pro $n \ge 0$.

9.5 (oblast zadaná v polárních souřadnicích)
Určete velikost plochy E (v kartézských souřadnicích), kterou ohraničuje křivka $\varrho = \sin\varphi, \quad \varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, zadaná pomocí polárních souřadnic. Načrtněte danou křivku v polárních i kartézských souřadnicích.

Řešení:
V polárních souřadnicích je oblast dána jako

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le \varrho \le \sin\varphi$$

položíme tedy $E := \Phi(U)$. Použitím věty o substituci dostaneme pro velikost plochy E (v kartézských souřadnicích!), že

$$\iint_{E=\Phi(U)} 1\, dS = \iint_U r\, dr\, d\varphi = \int_0^{\pi} \Big(\int_0^{\sin\varphi} r\, dr \Big)\, d\varphi = \int_0^{\pi} \Big[\frac{r^2}{2} \Big]_{r=0}^{r=\sin\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\pi}{4}.$$

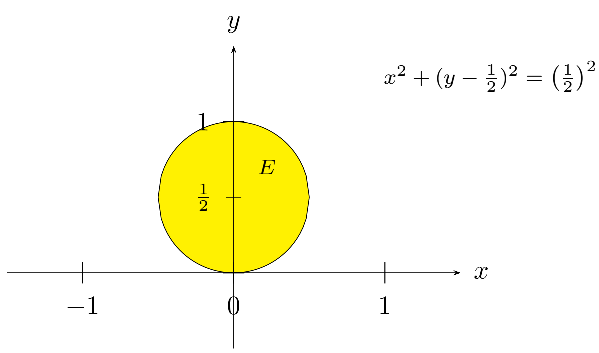
Trik k výpočtu integrálu: $\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, d\varphi$ a současně $\int_0^{2\pi} (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)\, d\varphi = \int_0^{2\pi} 1\, d\varphi = 2\pi$ tedy

$$\int_0^{\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

A co to vlastně máme za křivku: Protože máme $\varrho(\varphi) = \sin\varphi$, můžeme body (x, y) křivky parametrizovat pomocí úhlu φ a pak platí, že

$$x = \rho\cos\varphi = \sin\varphi\cos\varphi$$
$$y = \rho\sin\varphi = \sin^2\varphi$$

Současně máme vztah $x^2 + y^2 = \rho^2 = (\sin\varphi)^2$ a spojením tak dostáváme $x^2 + y^2 = y$, což je rovnice pro danou křivku. Její úpravou máme $x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$, což je prostě kružnice se středem $(0, \frac{1}{2})$ a poloměrem $\frac{1}{2}$.



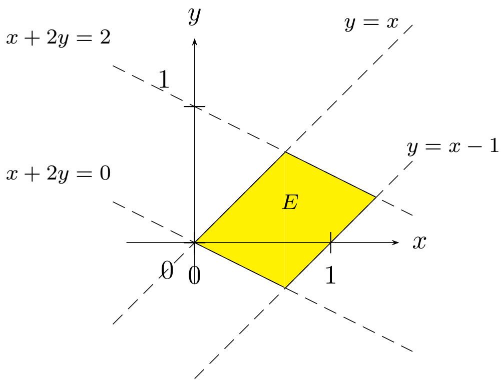
Protože jsme měli spočítat plochu, kterou kružnice (v kartézských souřadnicích) ohraničuje, není divu, že nám vyšla plocha kruhu o poloměru $\frac{1}{2}$, tedy $\pi/4$.

9.6 (lineární substituce)
S použitím substituce určete

$$\iint_E (x + 2y)\sqrt[3]{x - y}\, dA$$

kde E je omezená oblast určená křivkami $y = x$, $y = x - 1$, $x + 2y = 0$, $x + 2y = 2$.

Řešení:
Oblast E zjistíme z náčrtu:



Je to tedy

$$E: \quad x - 1 \leq y \leq x, \quad 0 \leq x + 2y \leq 2$$

což ještě přepíšeme jako

$$E: \quad 0 \leq x - y \leq 1, \quad 0 \leq x + 2y \leq 2 \; .$$

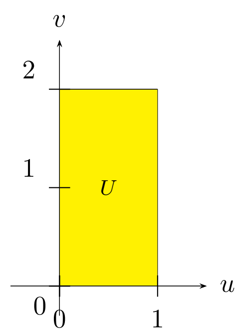
Vzhledem k tvaru množiny i funkce se nabízí použít (lineární) substituci Ψ, kterou zadáme pomocí její inverze:

$$\Psi^{-1}: \quad \begin{array}{rcl} u & = & x - y \\ v & = & x + 2y \end{array}$$

Množina

$$U: \quad 0 \leq u \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq v \leq 2 \; .$$

zřejmě parametrizuje E jako $E = \Psi(U)$.



Pro jakobián máme

$$\det(\mathrm{d}\Psi) = \frac{1}{\det\Big(\mathrm{d}(\Psi^{-1})\Big)} = \frac{1}{\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{1}{3} \; .$$

Po substituci pak máme

$$\iint\limits_{E=\Psi(U)} (x + 2y)\sqrt[3]{x - y}\, dA = \iint\limits_{U} v\sqrt[3]{u} \cdot \frac{1}{3}\, du\; dv = \frac{1}{3}\int\limits_0^2 \int\limits_0^1 v\sqrt[3]{u}\; du\; dv =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^2 v\ dv\right)\cdot\left(\int\limits_0^1 \sqrt[3]{u}\ du\right) = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\left[\frac{3}{4}u^{4/3}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}.$$

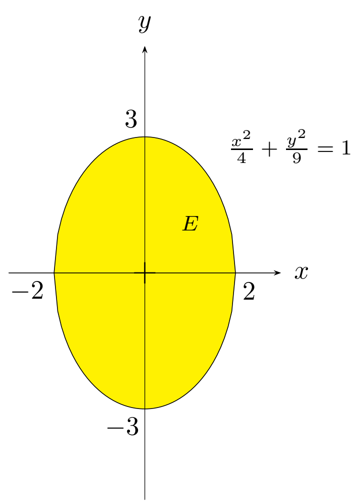
9.7 (obecnější transformace)
Spočítejte integrál

$$\iint\limits_E \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)}\,dx\ dy,$$

kde

$$E:\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\ .$$

Řešení:



Vzhledem ke tvaru množiny i funkce, kde se vyskytuje výraz $\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{y}{3}\right)^2$, zde budeme používat upravenou transformaci pomocí eliptických souřadnic

$$\Phi:\quad \begin{aligned}\tfrac{x}{2} &= r\cos\varphi\\ \tfrac{y}{3} &= r\sin\varphi\end{aligned}$$

které vzniknou složením polárních souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L}\circ\Psi,\qquad \mathcal{L}(\tilde{x},\tilde{y}) := (2\tilde{x}, 3\tilde{y}).$$

Máme tedy

$$\Phi' = \mathcal{L}'_{|\Psi}\circ\Psi' \quad \text{a} \quad \det\Phi' = (\det\mathcal{L}'_{|\Psi})\cdot(\det\Psi') = 6\cdot r,$$

protože

$$\mathcal{L}' = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$$

Oblast U parametrizující E pomocí souřadnic $\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi$ je tedy

$$U: \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq r \leq 1$$

protože $\Psi(U)$ je kruh $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \leq 1$, který $\mathcal{L}$ převede na E. Takže máme

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)}\, dx\ dy = \iint\limits_{U} 6r\sqrt{1-r^2}\, dr\ d\varphi = 6 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} 6\ d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\ dr\right) = 12\pi \left[-\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = 4\pi\ .$$