1. cvičení z Matematické analýzy 2

20. - 24. únor 2023

1.1 Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = \arcsin \frac{y-1}{x}$,

(b) $f(x,y) = \arccos \frac{x}{x+y}$,

(c) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}}$.

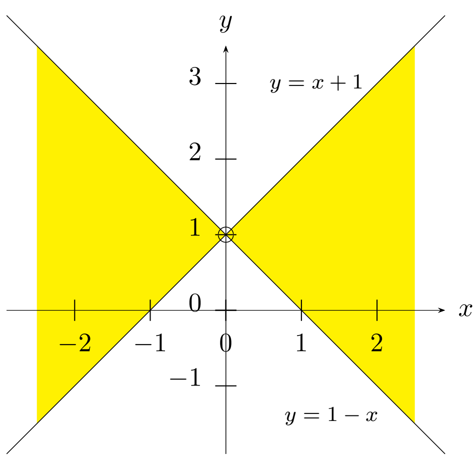
Řešení:

(a) Funkce arcussinus má definiční obor interval $\langle -1, 1\rangle$ a čitatel ve zlomku nesmí být nulový.

$$D(f):\ x \neq 0 \ \wedge\ -1 \leq \frac{y-1}{x} \ \wedge\ \frac{y-1}{x} \leq 1$$

tedy

$$D(f):\ (x > 0 \ \wedge\ 1-x \leq y \ \wedge\ y \leq x+1) \ \vee\ (x < 0 \ \wedge\ 1-x \geq y \ \wedge\ y \geq x+1).$$



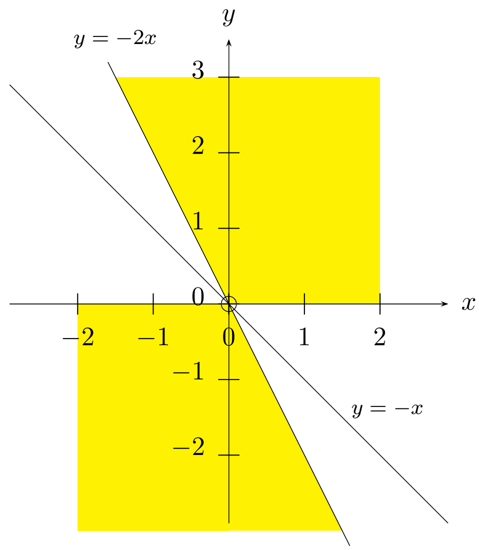
Speciálně, $D(f)$ neobsahuje bod $(0,1)$ (vyznačeno prázdným kroužkem).

(b) Funkce arcuscosinus má definiční obor interval $\langle -1, 1\rangle$ a čitatel ve zlomku nesmí být nulový.

$$D(f):\ x \neq 0 \ \wedge\ -1 \leq \frac{x}{x+y} \ \wedge\ \frac{x}{x+y} \leq 1$$

neboli

$$D(f):\ (x+y > 0 \ \wedge\ -2x \leq y \ \wedge\ 0 \leq y) \ \vee\ (x+y < 0 \ \wedge\ -2x \geq y \ \wedge\ y \leq 0)\ .$$



Speciálně, $D(f)$ neobsahuje bod $(0,0)$ (vyznačeno prázdným kroužkem).

(c) Výraz pod odmocninou musí být nezáporný a čitatel nesmí být nulový.

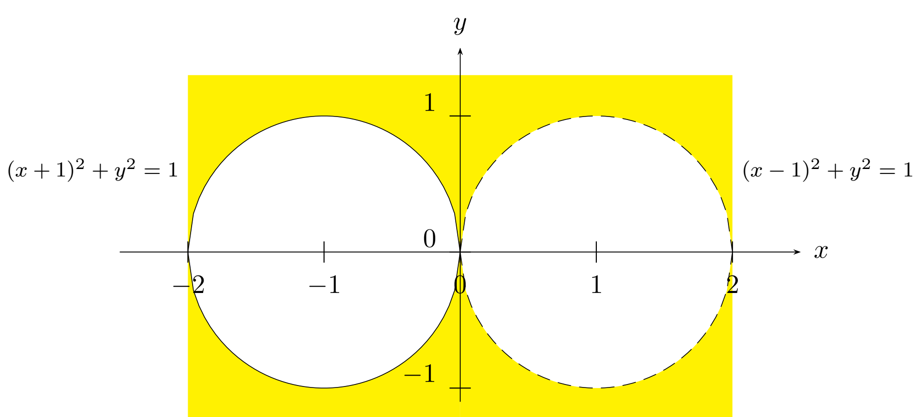
$$D(f): \ (x^2+2x+y^2 \geq 0 \ \wedge \ x^2-2x+y^2>0) \ \vee \ (x^2+2x+y^2 \leq 0 \ \wedge \ x^2-2x+y^2<0)$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec (tedy vhodným použitím vzorce $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$) můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$D(f): \ \Big((x+1)^2+y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-1)^2+y^2>1\Big) \ \vee \ \Big((x+1)^2+y^2 \leq 1 \ \wedge \ (x+1)^2+y^2<1\Big)$$

což představuje oblasti vně a uvnitř kružnic. Z toho je vidět, že druhá závorka představuje prázdnou množinu, tedy celkem je

$$D(f): \ (x+1)^2+y^2 \geq 1 \ \wedge \ (x-1)^2+y^2>1$$



1.2 Určete a načrtněte definiční obory následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = \ln\left(x \ln(y-x)\right)$,

(b) $f(x,y) = \sqrt{\frac{x^2-x+y^2}{2x-x^2-y^2}}$.

Řešení:

(a) Argument v každém z logaritmů musí být kladný.

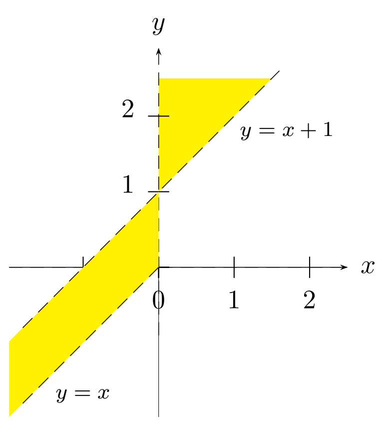
$$D(f): \; y-x>0 \wedge \Bigg(\Big(x>0 \;\wedge\; \ln(y-x)>0\Big) \;\vee\; \Big(x<0 \;\wedge\; \ln(y-x)<0\Big) \Bigg)$$

tedy

$$D(f): \; (x>0 \;\wedge\; y-x>1) \;\vee\; (x<0 \;\wedge\; 0<y-x<1)$$

neboli

$$D(f): \; (x>0 \;\wedge\; x+1<y) \;\vee\; (x<0 \;\wedge\; x<y<x+1) \; .$$



(b) Výraz pod odmocninou musí být nezáporný a čitatel nesmí být nulový.

$$D(f): \; (x^2-x+y^2 \geq 0 \;\wedge\; 2x-x^2-y^2>0) \;\vee\; (x^2-x+y^2 \leq 0 \;\wedge\; 2x-x^2-y^2<0)$$

Zadání lze upravit na přehlednější tvar. Doplněním na čtverec, tedy použitím vzorce $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ např. pro

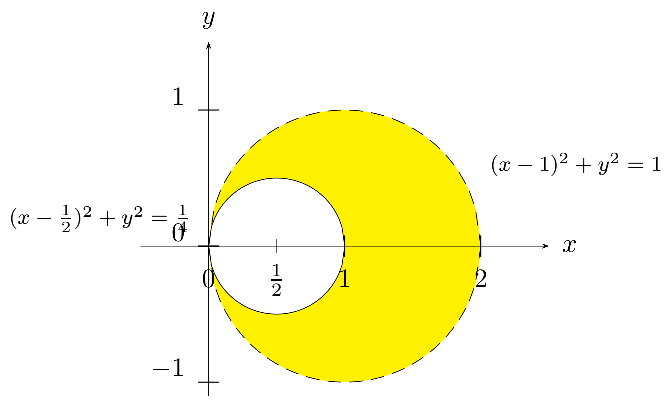
$$x^2-x = \left(x^2 - 2\cdot x\cdot \tfrac{1}{2} + (\tfrac{1}{2})^2\right) - (\tfrac{1}{2})^2 = (x-\tfrac{1}{2})^2 - (\tfrac{1}{2})^2$$

můžeme nerovnosti vyjádřit jako

$$D(f): \; \left((x-\tfrac{1}{2})^2+y^2 \geq \tfrac{1}{4} \;\wedge\; (x-1)^2+y^2<1\right) \;\vee\; \left((x-\tfrac{1}{2})^2+y^2 \leq \tfrac{1}{4} \;\wedge\; (x-1)^2+y^2>1\right)$$

což představuje oblasti vně a uvnitř kružnic. Z toho je vidět, že druhá závorka představuje prázdnou množinu, tedy celkem je

$$D(f): \; \left(x-\tfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \tfrac{1}{4} \;\wedge\; (x-1)^2+y^2<1$$



1.3 Načtrněte množiny:

(a) $x+y+z \leq 1 \ \wedge \ x,y,z \geq 0$,

(b) $x^2+y^2 \leq 1 \ \wedge \ x+z \geq 1$.

Řešení:
(a) Jde o čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ a $(0,0,1)$.

(b) Jde o válec $(x^2+y^2 \leq 1)$ seříznutý šikmo rovinou $x+z=1$.

1.4 Načtrněte množiny:

(a) $-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \ \wedge \ z \leq 0$;

(b) čtyřstěn s vrcholy $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$ a $(1,1,1)$.

Řešení:
(a) Jde o spodní polovinu koule $x^2+y^2+z^2 \leq 1$.

Definice: Pro funkci f z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ definujeme vrstevnici na hladině $c \in \mathbb{R}$ jako množinu

$$\{(x_1,\ldots,x_n) \in D(f) \mid f(x_1,\ldots,x_n)=c\} .$$

Zde $D(f)$ je definiční obor funkce f.
(Zdůrazněme, že vrstevnice obvykle bývají objekty s dimenzí $n-1$. Ale není to vždy pravidlem!)

Poznámka: Nechť g je nějaká funkce z $\langle 0,+\infty)$ do $\mathbb{R}$. Graf funkce tvaru $f(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2})$ je rotačně symetrický podle osy z, a vznikne rotací grafu funkce g kolem osy z. Vrstevnice funkce f jsou složeny z kružnic. (Nemusí to ale být vždy jen prosté kružnice, nýbrž také např. mezikruží).

1.5 Pro následující funkce f vždy načrtněte graf a popište vrstevnice:

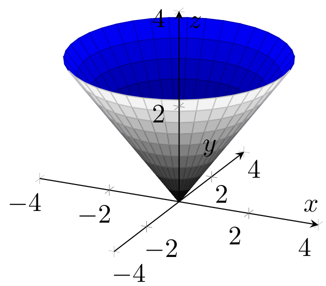
(a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ (kužel)

(b) $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ (eliptický paraboloid),

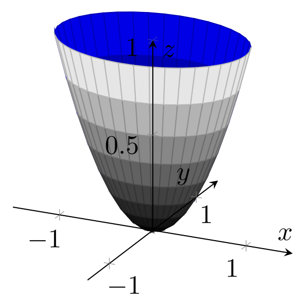
(c) $f(x,y) = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$ (jedna z částí dvoudílného rotačního hyperboloidu).

Řešení:
Označme si $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Hodnota r představuje vzdálenost bodu (x, y, z) od 3. osy (tj. osy z).

(a) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r) = r$, pro $r \geq 0$. Jde tedy o kužel a vrstevnice jsou soustředné kružnice:



(b) Uvažujme nejdříve funkci $h(x,y) = x^2 + y^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2$. Její graf (tzv. rotační paraboloid) vznikne rotací grafu funkce $g(r) = r^2$, pro $r \geq 0$ (tj. rotací paraboly). Graf funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2 = h(x, \sqrt{2}y)$ se od něj bude lišit zúžením ve směru y. Průřezy (tj. vrstevnice) grafu f tak budou soustředné elipsy a celý graf se pak označuje jako eliptický paraboloid.



(c) Graf funkce f vznikne rotací grafu funkce $g(r) = \sqrt{4 + r^2}$, pro $r \geq 0$. Abychom zjistili, o co jde, přepíšeme si $z = \sqrt{4 + r^2}$, $r \geq 0$ ekvivalentně jako $z^2 - r^2 = 4$, $z \geq 0$, $r \geq 0$. Graf funkce g je tedy část hyperboly, jejíž hlavní osou je osa z. Její rotací (kolem osy z) vznikne část (jeden díl) dvoudílného rotačního hyperboloidu. Vrstevnice jsou soustředné kružnice a celý útvar zdálky připomíná kužel (který je "asymptotou" celého grafu).