10. cvičení z Matematické analýzy 2

24. - 28. dubna 2022

Fubiniho věta (pro trojný integrál): Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce integrabilní v absolutní hodnotě (např. spojitá a omezená). Pak

$$\iiint_E f\, dV = \iint_{\pi_{1,2}(E)} \Big(\int_{\substack{\textit{řez množinou } E \textit{ pomocí} \\ \textit{přímky } \{(x,y)\}\times\mathbb{R}}} f(x,y,z)\, dz \Big)\, dx\, dy,$$

kde $\pi_{1,2} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ je projekce, $\pi_{1,2}(x,y,z) = (x,y)$.

Řezy jsou "vlákna" (která ale nemusí být souvislá). Po zintegrování podél vlákna, pak integrujeme přes příslušný průmět dané množiny (zde přes $\pi_{1,2}(E)$), kde postup dále můžeme opakovat (tj. průmět opět řežeme na vlákna).

10.1 (trojný integrál - Fubiniho věta)

Vypočtěte

(a)

$$\iiint_E z^2\, dV,$$

kde E je ohraničena plochami $y = x^2$, $z = 0$, $y + z = 1$.

(b)

$$\iiint_E y\, dV,$$

kde $E:\ x + y \le 1,\quad y + z \le 1,\quad x, y, z \ge 0.$

Řešení:

(i) Oblast E je omezena zdola rovinou $z = 0$, shora rovinou $y + z = 1$ a ze stran parabolickým válcem $y = x^2$. Projekce $\pi_{1,2}(E)$ oblasti E do roviny xy je omezena průnikem daných rovin, tj. přímkou $y = 1$ a parabolou $y = x^2$ (v rovině xy). Oblast integrace je tak

$$E:\quad 0 \le z \le 1 - y,\quad \underbrace{x^2 \le y \le 1,\quad -1 \le x \le 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

Máme tedy

$$\iiint_E z^2\, dV = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1}\int_{0}^{1-y} z^2\, dz\, dy\, dx = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{1} \frac{(1-y)^3}{3}\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \left[-\frac{(1-y)^4}{12}\right]_{y=x^2}^{y=1} dx =$$

$$= \frac{1}{12}\int_{-1}^{1} (1-x^2)^4\, dx = \frac{1}{6}\int_{0}^{1} 1 - 4x^2 + 6x^4 - 4x^6 + x^8\, dx = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{4}{3} + \frac{6}{5} - \frac{4}{7} + \frac{1}{9}\right) = \frac{64}{3}.$$

(ii) Oblast integrace je jehlan ležící na boku

$$E:\quad 0 \le z \le 1 - y,\quad \underbrace{0 \le y \le 1 - x,\quad 0 \le x \le 1}_{\text{projekce } E \text{ do roviny } xy}.$$

$$\iiint\limits_E y\ dV = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} \int\limits_0^{1-y} y\ dz\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-x} y(1-y)\ dy\ dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=1-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{(1-x)^2}{2} - \frac{(1-x)^3}{3}\ dx = \left[-\frac{(1-x)^3}{6} + \frac{(1-x)^4}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12}.$$

Věta o substituci (trojný integrál): Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^3$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^3$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det(d\Phi) \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných ploch, křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv trojného integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iiint\limits_{\Phi(U)} f\ dV = \iiint\limits_U (f \circ \Phi)(\alpha, \beta, \gamma) \cdot |\det(d\Phi(\alpha, \beta, \gamma))|\ d\alpha\, d\beta\, d\gamma.$$

Cylindrické souřadnice (vzhledem k ose z) mají předpis:

$$\Phi : \begin{array}{ccc} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \\ z & = & h \end{array}$$

kde $(r, \varphi, h) \in \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R}$. Dále je

$$d\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \det(d\Phi) = r\ .$$

Moment setrvačnosti: Moment setrvačnosti J tělesa $E \subseteq \mathbb{R}^3$ s hustotou $\varrho(x, y, z)$ vzhledem k ose otáčení p je definován jako

$$J = \iiint\limits_E v^2(x, y, z) \cdot \varrho(x, y, z)\ dV$$

kde funkce $v(x, y, z)$ je vzdálenost bodu (x, y, z) od osy p. Tělesa s velkým momentem setrvačnosti jsou např. setrvačníky, které je těžké roztočit a pak i zastavit.

10.2 (cylindrické souřadnice)

Uvažme těleso $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ s hustotou $\sigma(x, y, z) = z$. Nalezněte $a > 0$ tak, aby rovina $z = a$ rozdělila těleso M na dvě stejně těžké části.

Řešení:
Použijeme funkci $f(a) = \iiint\limits_{M_a} z\ dV$, kde $M_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \leq x^2 + y^2 \leq a\}$ a hodnotu a určíme tak, že $f(a) = \frac{1}{2} f(1)$.

Oblast M_a je omezena zespodu rotačním paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a shora rovinou $z = a$. Je tedy vhodné použít cylindrické souřadnice.

$$\Phi : \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad z = h\ .$$

Po dosazení do nerovnosti pro M_a máme

$$h \leq r^2 \leq a$$

což odpovídá řezu tělesa M_a svislou polorovinou, která prochází osou z a je určena úhlem φ (který se měří os kladného směru osy x).

Oblast parametrizace U_a tak bude

$$U_a: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad \sqrt{h} \le r \le \sqrt{a} \quad \& \quad 0 \le h \le a\ .$$

Pak je

$$f(a) = \iiint\limits_{M_a = \Phi(U_a)} z \ \mathrm{d}V = \iiint\limits_{U_a} h \cdot r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{a} \int\limits_{\sqrt{h}}^{\sqrt{a}} hr \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}h \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \left(\int\limits_0^{a} \frac{h}{2}(a-h) \ \mathrm{d}h \right) \mathrm{d}\varphi = \left(\int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2} \ \mathrm{d}\varphi \right) \cdot \left(\int\limits_0^{a} ha - h^2 \ \mathrm{d}h \right) = \pi \left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right) = \frac{\pi a^3}{6}\ .$$

Tedy z rovnosti $f(a) = \frac{1}{2} f(1)$ máme $\frac{\pi a^3}{6} = \frac{\pi}{12}$ neboli $a = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

10.3 (cylindrické souřadnice)

Určete moment setrvačnosti J tělesa

(a) E ohraničeného plochami $y = x^2 + z^2$ a $y = 8 - x^2 - z^2$ vzhledem k ose otáčení y (s hustotou $\sigma(x, y, z) = 1$).

(b) $E: \sqrt{x^2 + y^2} \le z \le h_0$, kde $h_0 > 0$, s hustotou $\sigma(x, y, z) = 1$ vzhledem k ose otáčení z.

Řešení:

(a) Těleso E je sevřeno mezi grafy dvou navzájem otočených rotačních paraboloidů s osou y jako osou symetrie (celkově vypadá jako “čočka”), tedy

$$E: \quad x^2 + z^2 \le y \le 8 - x^2 - z^2$$

Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = h \qquad z = r\sin\varphi\ .$$

(kde jakobián v absolutní hodnotě je opět r). Po dosazení do nerovností máme

$$r^2 \le h \le 8 - r^2$$

přičemž rozsah úhlu je $0 \le \varphi \le 2\pi$. Projekce E do roviny xz je určena kružnicí vzniklou průnikem obou paraboloidů, tedy

$$x^2 + z^2 = 8 - x^2 - z^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + z^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 4$$

Oblast parametrizace U tak bude

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 2 \quad \& \quad r^2 \le h \le 8 - r^2\ .$$

Pak můžeme psát

$$J = \iiint\limits_E (x^2 + z^2) \ dV = \iiint\limits_U r^2 \cdot r \ d\varphi \ dh \ dr = \int\limits_0^2 \int\limits_{r^2}^{8-r^2} \int\limits_0^{2\pi} r^3 \ d\varphi \ dh \ dr = 2\pi \int\limits_0^2 \int\limits_{r^2}^{8-r^2} r^3 \ dh \ dr =$$

$$= 2\pi \int_0^2 r^3(8 - 2r^2) \ \ dr = 4\pi \int_0^2 4r^3 - r^5 \ \ dr = 4\pi \left(16 - \frac{64}{6}\right) = \frac{64}{3}\pi \ .$$

(b) Oblast integrace E je kužel s výškou h_0 a poloměrem podstavy také h_0, který stojí na svém vrcholu v počátku. Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi : \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad z = h \ .$$

Jako parametrizaci E si vezmeme

$$U : \quad 0 \le r \le h \le h_0 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \ .$$

Můžeme tedy psát

$$J = \iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2 + y^2) \ dV = \iiint\limits_{U} r^2 \cdot r \ dV = \int_0^{h_0}\int_0^{h}\int_0^{2\pi} r^3 \ d\varphi \ dr \ dh = 2\pi \int_0^{h_0}\int_0^{h} r^3 \ \ dr \ dh =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^{h_0} h^4 \ \ dh = \frac{\pi}{10} h_0^5.$$

Sférické souřadnice mají předpis:

$$\Psi : \begin{array}{rcl} x & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

kde $(r, \varphi, \vartheta) \in \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, \pi\rangle$.

Poznámka: Sférické souřadnice jsou složením dvou (upravených) cylindrických souřadnic a sice:

$$\Psi = \Phi_2 \circ \Phi_1$$

$$\Phi_2 : \begin{array}{rcl} x & = & \tilde{r}\cos\tilde{\varphi} \\ y & = & \tilde{r}\sin\tilde{\varphi} \\ z & = & \tilde{z} \end{array} \ , \quad \Phi_1 : \begin{array}{rcl} \tilde{r} & = & r\sin\vartheta \\ \tilde{\varphi} & = & \varphi \\ \tilde{z} & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

takže pro determinant máme

$$\det d\Psi = \det(d\Phi_2)_{|\Phi_1} \cdot \det(d\Phi_1) = \tilde{r}_{|\Phi_1} \cdot r = (r\sin\vartheta) \cdot r = r^2 \sin\vartheta.$$

10.4 (sférické souřadnice)

Spočítejte

$$\iiint\limits_{E} x e^{x^2+y^2+z^2} \ dV$$

kde

$$E : \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \quad \& \quad 0 \le x \quad \& \quad 0 \le y \quad \& \quad 0 \le z.$$

Řešení:

Pro oblast E použijeme sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

a parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Pro jakobián máme

$$\det \Psi' = r^2 \sin\vartheta$$

a můžeme tedy psát

$$\iiint\limits_{E=\Psi(U)} x e^{(x^2+y^2+z^2)^2}\, dV = \iiint\limits_{U} r\sin\vartheta\cos\varphi \cdot e^{r^4} \cdot r^2 \sin\vartheta\ dr\ d\varphi\ d\vartheta =$$

$$= \left(\int_0^1 r^3 e^{r^4}\ dr\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\ d\varphi\right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\ d\vartheta\right) = \left[\frac{e^{r^4}}{4}\right]_0^1 \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi(e-1)}{16}\ .$$

10.5 (sférické souřadnice)

Vypočtěte těžiště tělesa

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le R^2 \quad \& \quad z \cdot \tan(\alpha_0) \ge \sqrt{x^2+y^2},$$

s hustotou $\sigma(x,y,z) = 1$, kde $R > 0$ a $\alpha_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ jsou parametry.

Řešení:

Těleso E je průnikem koule o poloměru R a kužele s vrcholovým úhlem $2\alpha_0$, jehož špička je ve středu koule. Výhodné tedy bude použít sférické souřadnice

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x & = & (r\sin\vartheta)\cos\varphi \\ y & = & (r\sin\vartheta)\sin\varphi \\ z & = & r\cos\vartheta \end{array}$$

Parametrizace $E = \Psi(U)$ pak bude

$$U: \quad 0 \le r \le R \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \alpha_0$$

Pro těžiště musíme nejdříve spočítat hmotnost:

$$m = \iiint\limits_{E=\Psi(U)} 1\ dV = \iiint\limits_{U} r^2 \sin\vartheta\ dV = \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^2 \sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr =$$

$$= 2\pi \int_0^R \int_0^{\alpha_0} r^2 \sin\vartheta\ d\vartheta\ dr = 2\pi(1-\cos\alpha_0) \int_0^R r^2\ dr = \frac{2}{3}\pi R^3 (1-\cos\alpha_0).$$

Protože těleso E je rotačně symetrické podle osy z, budou x-ová i y-ová souřadnice těžiště obě nulové. Zbývá tedy spočítat z-ovou souřadnici těžiště:

$$T_3 = \frac{1}{m} \iiint\limits_{E=\Psi(U)} z \; dV = \frac{1}{m} \iiint\limits_{U} r^3 \cos\vartheta \sin\vartheta \; d\varphi \; d\vartheta \; dr = \frac{1}{m} \int_0^R \int_0^{\alpha_0} \int_0^{2\pi} r^3 \frac{\sin 2\vartheta}{2} \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= \frac{\pi}{m} \left(\int_0^R r^3 \; dr \right) \cdot \left(\int_0^{\alpha_0} \sin 2\vartheta \; d\vartheta \right) = \frac{\pi R^4}{8m}(1 - \cos 2\alpha_0) = \frac{3R}{16} \cdot \frac{1 - \cos 2\alpha_0}{1 - \cos\alpha_0} = \frac{3R}{8}(1 + \cos\alpha_0).$$

10.6 (sférické souřadnice)
Spočítejte

(a)

$$\iiint\limits_E x^2 z \; dV$$

kde

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \quad \& \quad 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \; .$$

(b)

$$\iiint\limits_E x^2 + y^2 \; dV$$

kde

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \quad \& \quad \sqrt{x^2 + y^2} \le z \; .$$

Řešení:
(a) Těleso E je horní polokoule s vyjmutým kuželem, jehož špička je ve středu koule. Parametrizace pomocí sférických souřadnic je

$$\Psi: \quad \begin{array}{rcl} x &=& r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y &=& r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z &=& r \cos\vartheta \end{array}$$

s oblastí parametrizace

$$U: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \; .$$

Tedy

$$\iiint\limits_E x^2 z \; dV = \iiint\limits_U r^3 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi \cos\vartheta \cdot r^2 \sin\vartheta \; dV = \int_0^1 \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^5 \sin^3\vartheta \cos\vartheta \cos^2\varphi \; d\varphi \; d\vartheta \; dr =$$

$$= \left(\int_0^1 r^5 \; dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta \cos\vartheta \; d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \; d\varphi \right) = \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{\sin^4\vartheta}{4} \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot \pi =$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} \cdot \pi = \frac{\pi}{32}$$

(b) Oblast integrace je E průnik koule a kužele. Jako parametrizaci E si vezmeme sférické souřadnice

$$\Psi : \begin{array}{rcl} x & = & (r \sin\vartheta) \cos\varphi \\ y & = & (r \sin\vartheta) \sin\varphi \\ z & = & r \cos\vartheta \end{array}$$

a oblast

$$U : \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad \& \quad 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{4} \ .$$

Můžeme tedy psát

$$\iiint\limits_{E=\Phi(U)} (x^2 + y^2)\ dV = \iiint\limits_{U} r^2 \sin^2\vartheta \cdot r^2 |\sin\vartheta|\ dV = \int\limits_0^{\sqrt{18}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} r^4 \sin\vartheta\ d\vartheta\ d\varphi\ dr\ =$$

$$= \underbrace{\left(\int\limits_0^1 r^4\ \mathrm{d}r \right)}_{=\frac{1}{5}} \cdot \underbrace{\left(\int\limits_0^{2\pi} 1\ \mathrm{d}\varphi \right)}_{=2\pi} \cdot \underbrace{\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta \right)}_{=1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{5}\pi(2 - \sqrt{2})\ .$$