11. cvičení z Matematické analýzy 2

1. - 5. května 2023

11.1 (parametrizace křivky)

Nalezněte parametrizaci křivky, která vznikne:

(a) průnikem válce $x^2 + y^2 = 16$ a roviny $z = x + y$.

(b) průnikem válce $x^2 + y^2 = 2x$ a kužele $\sqrt{x^2 + y^2} = z$.

Řešení:

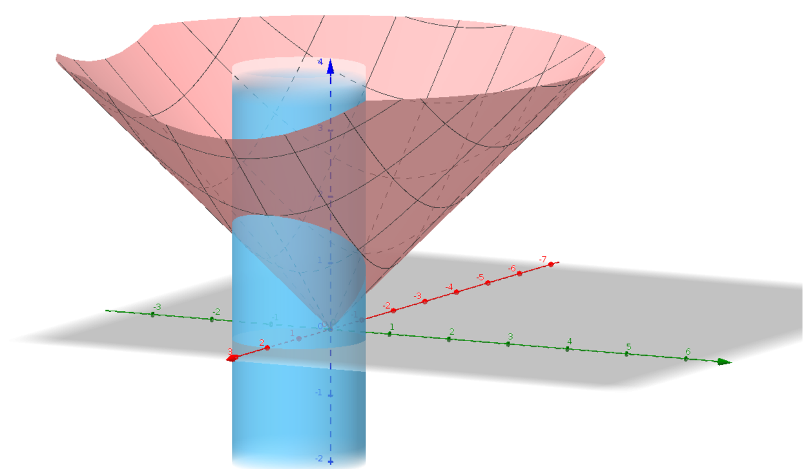
(a) Křivka představuje průnik válce a šikmé roviny. Je to tedy elipsa.
Průmět $\mathcal{C}$ do roviny xy má rovnici $x^2+y^2 = 4^2$ a můžeme tak použít obvyklou parametrizaci kružnice

$$x(t) = 4\cos t\ , \quad y(t) = 4\sin t \quad \text{pro} \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle\ .$$

Tím je určena i poslední složka, tj.

$$z(t) = x(t) + y(t) = 4(\cos t + \sin t)\ .$$

(b) Rovnice $x^2 + y^2 = 2x$ je to samé jako $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ (což je válec).
Křivka představuje tedy průnik kuželu s válcem jehož poloměr je 1 a osa kužele leží v plášti válce.



Parametrizaci uděláme pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2 = h^2 \quad \& \quad r^2 = 2r\cos\varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 2\cos\varphi$, $h = r = 2\cos\varphi$ a $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = 2\cos^2\varphi\ , \quad y(\varphi) = 2\cos\varphi\sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = 2\cos\varphi \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\rangle$$

Jiná parametrizace pomocí posunutých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= 1 + r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$|h| = \sqrt{2r}\sqrt{1+\cos\varphi} \quad \& \quad r^2 = 1 \quad \& \quad h \ge 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = 1$, $h = \sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi} = 2|\cos\frac{\varphi}{2}|$ a $-\pi \le \varphi \le \pi$. Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi) = 1 + \cos\varphi\ , \quad y(\varphi) = \sin\varphi\ , \quad z(\varphi) = 2\cos\tfrac{\varphi}{2} \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\pi, \pi\rangle$$

Připomenutí: Integrál z funkce f podél křivky $\mathcal{C}$ spočítáme podle vztahu

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)||\ dt,$$

kde φ je vhodná parametrizace křivky $\mathcal{C}$, tj. zobrazení $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}^n$, které je

- spojité a po částech spojitě diferencovatelné na intervalu $\langle a, b\rangle$ (tj. křivka může být v některých bodech "zlomená", ale stále to má být souvislá čára),
- až na konečně mnoho výjimek $t_1, \ldots, t_n \in \langle a, b\rangle$ platí, že:
  φ je prosté na $\langle a, b\rangle$ a $\|\varphi'(t)\| \ne 0$ pro $t \in \langle a, b\rangle$ (tj. křivka může protínat konečněkrát sama sebe a vektor rychlosti chceme mít nenulový až konečně mnoho výjimek),
- $\varphi(\langle a, b\rangle) = \mathcal{C}$.

Integrál z funkce nezávisí na volbě orientace křivky. Změnu orientace lze vždy provést např. jako

$$\psi(t) := \varphi(a + b - t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle a, b\rangle\ .$$

11.2 (délka křivky)
Určete délku

(a) cykloidy Γ s parametrizací

$$\varphi: \quad x = t - \sin t \quad \wedge \quad y = 1 - \cos t$$

kde $0 \le t \le 2\pi$. Cykloida je křivka určená dráhou bodu, který je na kružnici (zde s poloměrem $a = 1$), která se valí bez tření po přímce.

(b) asteroidy $\mathcal{C}: \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, s parametrizaci

$$\varphi: \quad x = \cos^3 t \ \ \& \ \ y = \sin^3 t \ \ \& \ \ 0 \le t \le 2\pi.$$

Řešení:
(a) Délka křivky Γ s parametrizací φ se vypočítá jako

$$\ell(\Gamma) = \int_a^b ||\varphi'(t)||\ dt \quad \Big(= \int_\Gamma 1\ ds\Big),$$

neboli jako integrál z konstantní funkce $f = 1$ podél dané křivky Γ. Máme

$$\varphi'(t) = \Big(1 - \cos t,\ \sin t\Big)$$

a

$$||\varphi'(t)|| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}.$$

Takže můžeme psát

$$\ell(\Gamma) = \int_\Gamma 1\ ds = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\cos t}\ dt = \left[\begin{smallmatrix} 2u=t \\ 2du=dt \end{smallmatrix}\right] = 2\sqrt{2}\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos(2u)}\ du =$$

$$= \Big\{\cos(2u) = \cos^2 u - \sin^2 u\Big\} = 4\int_0^{\pi} \sin u\ du = 8\ .$$

(b) Rovnice asteroidy se podobá rovnici kružnice, až na jiné exponenty. Máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(-3\cos^2 t \cdot \sin t,\ 3\sin^2 t \cdot \cos t\Big) = 3\cos t \cdot \sin t \cdot \Big(-\cos t,\ \sin t\Big).$$

tedy

$$\|\varphi'(t)\| = 3|\cos t \sin t|\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 3|\cos t \sin t|\ .$$

Takže můžeme psát

$$\ell(\mathcal{C}) = \int_{\mathcal{C}} 1\ ds = \int_0^{2\pi} \|\varphi'(t)\|\ dt = \int_0^{2\pi} 3|\cos t \sin t|\ dt = 6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ 2\cos t \sin t\ dt =$$

$$= 6\left[\sin^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6\ .$$

11.3 (křivkový integrál z funkce)
Spočítejte $\int_{\mathcal{C}} f\, ds$, kde $f(x,y,z) = xe^{yz}$ a $\mathcal{C}$ je úsečka vedoucí z bodu $A = (0,0,0)$ do bodu $B = (1,2,3)$.

Řešení:
Parametrizace úsečky je $\varphi(t) = A + t(B-A) = (t, 2t, 3t)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$. Tedy

$$\varphi'(t) = (1,2,3) \qquad ||\varphi'(t)|| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$$

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_0^1 f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)||\ dt = \int_0^1 te^{2t\cdot 3t} \cdot \sqrt{14}\ dt = \sqrt{14}\left[\frac{e^{6t^2}}{12}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{14}}{12}(e^6 - 1)\ .$$

Připomenutí: Integrál z vektorového pole $\vec{F}$ podél dané orientované křivky $\mathcal{C}$ počítáme jako práci síly podél této křivky s normovaným tečným polem $\vec{T}$ (jež určuje orientaci křivky $\mathcal{C}$).

Jestliže parametrizace $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathcal{C}$ odpovídá zvolené parametrizaci, pak máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{\mathcal{C}} (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds = \int\limits_{a}^{b} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt\ .$$

Pokud parametrizace φ je v opačném směru než námi zvolená orientace $\mathcal{C}$, pak máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int\limits_{a}^{b} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt\ .$$

11.4 (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete křivkový integrál $\int\limits_{C} \vec{F} \cdot d\vec{s}$ z vektorového pole $\vec{F} = \Big(x^2,\ 4y\Big)$, kde C má parametrizaci $\varphi(t) = (e^t, t^2)$, $t \in [0, 2]$ a orientaci určenou touto parametrizací.

Řešení:

Pro $\varphi(t) = \big(x(t), y(t)\big) = (e^t, t^2)$, $t \in [0, 2]$ máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = \Big(e^t,\ 2t\Big)$$

Takže můžeme psát

$$\int\limits_{C} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int\limits_{0}^{2} \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int\limits_{0}^{2} (x^2,\ 4y)_{|_{\varphi(t)}} \cdot \varphi'(t)\ dt = \int\limits_{0}^{2} (e^{2t}, 8t) \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ 2t \end{pmatrix}\ dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{2} e^{3t} + 16t^2\ dt = \left[\frac{e^{3t}}{3} + \frac{16t^3}{3}\right]_0^2 = \frac{e^6 + 127}{3}.$$

Definice konzervativního pole: Spojité vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené a obloukově souvislé množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ (tedy každé dva body v U lze propojit alespoň jednou křivkou ležící v U) nazýváme *konzervativní*, pokud práce síly z bodu A do bodu B nezávisí na způsobu, jakým oba body propojíme (na bodech A a B ale záviset může). V tom případě pro tuto práci volíme značení $\int\limits_{A}^{B} \vec{F}\ d\vec{s}$.

Věta (o potenciálu): Následující podmínky jsou ekvivalentní pro spojité vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené obloukově souvislé množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$:

- pole $\vec{F}$ je konzervativní na U,
- práce pole $\vec{F}$ podél jakékoliv uzavřené křivky $\mathcal{C} \subseteq U$ je nulová,
- existuje funkce (tzv. *potenciál*) $f : U \to \mathbb{R}$, že $\text{grad}(f) = \vec{F}$.

Pak platí, že

$$\int\limits_{A}^{B} \vec{F}\ d\vec{s} = \int\limits_{A}^{B} \text{grad}(f)\ d\vec{s} = f(B) - f(A)\ .$$

Definice jednoduše souvislé množiny: Množina $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se nazývá *jednoduše souvislá*, jestliže se jakákoliv uzavřená křivka v U dá v rámci U spojitě stáhnout do bodu.

Příkladem jednoduše souvislé množiny je $\mathbb{R}^n$ nebo $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
Příkladem otevřené množiny, která není jednoduše souvislá je $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^3 \setminus$ “přímka” nebo torus (tj. “pneumatika”).

Věta: Pro spojitě diferencovatelné vektorové pole $\vec{F}$ na otevřené obloukově souvislé množině $U \subseteq \mathbb{R}^n$ platí:

- $\vec{F}$ je konzervativní $\Rightarrow \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a)$ pro všechna $a \in U$ a $i, j = 1, \dots, n$.
  (tato podmínka vlastně znamená záměnnost druhých parciálních derivací potenciálu f)
- Jestliže množina U je *jednoduše souvislá* a $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(a)$ pro všechna $a \in U$ a $i, j = 1, \dots, n$, pak $\vec{F}$ je konzervativní.

11.5 Najděte všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby vektorové pole

$$\vec{F} = (\alpha xy + y^2,\ x^2 + 2xy)$$

bylo potenciální a příslušný potenciál určete. Pro potenciální pole pak spočítejte práci $\int_A^B \vec{F} d\vec{s}$ pole $\vec{F}$ z bodu $A = (0,0)$ do $B = (1,1)$.

Řešení:
Pole je definováno na celém $\mathbb{R}^2$, což je jednoduše souvislá množina. Pole $\vec{F}$ je spojitě diferencovatelné, tedy potenciál pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ bude existovat právě když $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ všude na $\mathbb{R}^2$ neboli

$$\alpha x + 2y = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x + 2y \quad \forall x, y$$

což nastane právě když $\alpha = 2$.

Potenciál jsme však takto nenašli. Při použití následujícího postupu můžeme současně vyřešit obě úlohy - nalezení podmínky pro parametr α i explicitní tvar potenciálu.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \alpha xy + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 + 2xy. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y) = \int (\alpha xy + y^2)\ dx = \alpha \frac{x^2 y}{2} + xy^2 + A(y),$$

kde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$x^2 + 2xy = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\alpha \frac{x^2 y}{2} + xy^2 + A(y)\right) = \alpha \frac{x^2}{2} + 2xy + \frac{\partial A}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial A}{\partial y}(y) = \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) x^2.$$

Levá strana rovnice nezávisí na proměnné x, tedy i pravá strana na ní nesmí záviset, takže musí být $\alpha = 2$. Pak máme

$$\frac{\partial A}{\partial y}(y) = 0.$$

Dostáváme $A(y) = c$, kde $c \in \mathbb{R}$. Celkově tak máme potenciál jen pro $\alpha = 2$ ve tvaru

$$f(x,y) = x^2 y + xy^2 + c.$$

Práce je pak určena jako $\int\limits_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(1,1) - f(0,0) = 2.$

11.6 Nalezněte funkci $g(x)$ tak, aby vektorové pole

$$\vec{F} = (y\sin x + yx\cos x + e^y, \quad g(x) + xe^y)$$

bylo potenciální na celém $\mathbb{R}^2$ a $g(0) = 0$.

Řešení:
Pole je definováno na celém $\mathbb{R}^2$, což je jednoduše souvislá množina. Za předpokladu, že funkce g je spojitě diferencovatelná je pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ potenciální právě když $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$ všude na $\mathbb{R}^2$ neboli

$$\sin x + x\cos x + e^y = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = g'(x) + e^y \quad \forall x, y$$

neboli

$$g'(x) = \sin x + x\cos x$$

a tudíž $g(x) = \int \sin x + x\cos x \; dx = x\sin x + C$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Z podmínky $g(0) = 0$ pak máme $0 = g(0) = 0 + C$, tedy $C = 0$ a tvar funkce je

$$g(x) = x\sin x \; .$$

.

K řešení můžeme využít i definici potenciálu (který tímto i nalezneme). Tento postup je obecnější protože nemusíme předpokládat, že funkce g je spojitě diferencovatelná.

Hledáme tedy funkci $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ takovou, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y\sin x + yx\cos x + e^y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= g(x) + xe^y. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y) = \int (y\sin x + yx\cos x + e^y) \; dx = yx\sin x + xe^y + A(y),$$

kde $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$g(x) + xe^y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(yx\sin x + xe^y + A(y)\right) = x\sin x + xe^y + \frac{\partial A}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial A}{\partial y}(y) = g(x) - x\sin x.$$

Levá strana rovnice nezávisí na proměnné x a pravá strana zase nezávisí na proměnné y. Z rovnosti obou stran tedy plyne, že obě strany jsou konstantní, tj. existuje $c \in \mathbb{R}$, že $\frac{\partial A}{\partial y}(y) = c$ a $c = g(x) - x\sin x$ pro všechna $x, y \in \mathbb{R}$. Z podmínky $g(0) = 0$ je $c = 0$ a tedy $A(y) = a$ pro nějaké $a \in \mathbb{R}$.

Opět tedy máme $g(x) = x\sin x$ a potenciál je tvaru $f(x,y) = yx\sin x + xe^y + a$.

11.7 (konzervativní pole, potenciál)

Najděte potenciál pro pole

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^2+y, \quad y^2+x, \quad ze^z)$$

a hodnotu práce síly z bodu $A=(0,1,0)$ do $B=(-1,1,0)$.

Řešení:
Potenciál je funkce $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= x^2+y\\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y^2+x\\ \frac{\partial f}{\partial z} &= ze^z\ .\end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2+y)\ dx = \frac{x^3}{3}+xy+C(y,z),$$

kde $C:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na y a z. Nalezený tvar funkce f teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2+x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3}+xy+C(y,z)\right) = x+\frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2.$$

Protože levá strana nezávisí na proměnné x, nesmí se tato proměnná objevit ani na druhé straně rovnice - což nastává a tedy můžeme s řešením pokračovat. Dostáváme

$$C(y,z) = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3}+D(z),$$

kde $D:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na z. Zatím tedy máme

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3}+xy+\frac{y^3}{3}+D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3}+xy+\frac{y^3}{3}+D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}(z).$$

Opět - pravá strana nezávisí na proměnných x,y, a tudíž se nesmí tyto proměnné objevit ani na druhé straně rovnice - což nastává a tedy můžeme s řešením pokračovat. Takže

$$D(z) = \int ze^z\ dz = (z-1)e^z+K,$$

kde $K\in\mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3}+xy+\frac{y^3}{3}+(z-1)e^z+K.$$

Práce pole pak je

$$\int_A^B \vec{F}\ d\vec{s} = f(B)-f(A) = f(-1,1,0)-f(0,1,0) = -2-\Big(-\frac{2}{3}\Big) = -\frac{4}{3}\ .$$

Nechť $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace, která je omezená, a nechť její hranice ∂E je tvořena uzavřenou křivkou $\mathcal{C}$, co sama sebe nikde neprotíná (tzv. jednoduchá uzavřená křivka). Nechť orientace křivky $\mathcal{C}$ je taková, že při jejím procházení máme v daném místě oblast E vždy po levé straně.

Podle **Greenovy věty** pro pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{E} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS,$$

kde výraz na pravé straně si můžeme pamatovat jako $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ F_1 & F_2 \end{vmatrix}$. Je to analogie rotace pole (jakéhosi "víru" v daném bodě) ve třech dimenzích. Interpretací Greenovy věty je to, že "víry" pole uvnitř oblasti se v sousedních bodech vyruší a zbyde jen "vír" na okraji oblasti.

Poznámka: Hranici E může být tvořena i z více uzavřených křivek, u kterých opět požadujeme, aby hranice ležela po jejich levé straně při procházení po směru dané křivky.

11.8 Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole

$$\vec{F} = (ye^x + \sin(x^2), \ 2e^x + \operatorname{arctg}(e^y))$$

podél kladně orientované hranice $\mathcal{C}$ obdélníku s vrcholy $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,4)$ a $(0,4)$.

Řešení:

Orientace křivky $\mathcal{C}$ je v souhlase s Greenovou větou. Pro oblast

$$M: \quad 0 \leq x \leq 3 \quad \& \quad 0 \leq y \leq 4$$

a vektorové pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ tedy máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \, dS = \iint\limits_{M} (2e^x - e^x) \, dS = \int\limits_0^4 \int\limits_0^3 e^x \, dx \, dy = 4(e^3 - 1) \; .$$

Je vidět, že původní křivkový integrál bychom těžko počítali, ale s využitím Greenovy věty je výpočet snadný.