# 12. cvičení z Matematické analýzy 2

8. - 12. května 2023

**12.1** (parametrizace křivky)

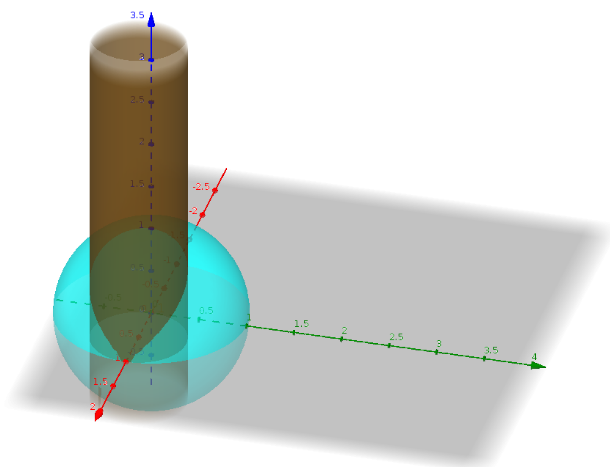
Naleznete parametrizaci část tzv. *Vivianiho* křivky

$$\mathcal{C}: \quad x^2+y^2+z^2=1 \quad \& \quad x^2+y^2=x \quad \& \quad z \geq 0 \; .$$

**Řešení:**

Rovnice $x^2+y^2=x$ je to samé jako $(x-\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2$ (což je válec).

Křivka představuje tedy průnik horní části sféry (o poloměru 1) s válcem jehož poloměr je $\frac{1}{2}$ a osa sféry leží v plášti válce.



Parametrizací můžeme udělat vícero způsoby:

- pomocí obvyklých válcových souřadnic:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$r^2+h^2=1 \quad \& \quad r^2=r\cos\varphi \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r=\cos\varphi$, $h=|\sin\varphi|$ a $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\varphi)=\cos^2\varphi \; , \quad y(\varphi)=\cos\varphi\sin\varphi \; , \quad z(\varphi)=|\sin\varphi| \quad \text{pro} \quad \varphi \in \langle -\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2} \rangle$$

která má požadovanou orientaci.

- pomocí posunutých válcových souřadnic (do osy výše zmíněného válce):

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2} + r\cos\alpha \\ y &= r\sin\alpha \\ z &= h \end{aligned}$$

Po dosazení do podmínek dostaneme

$$\frac{1}{4} + r\cos\alpha + r^2 + h^2 = 1 \quad \& \quad r^2 = (\tfrac{1}{2})^2 \quad \& \quad h \geq 0$$

které splníme (pro všechny možnosti) při volbě $r = \frac{1}{2}$, $h = \sqrt{\frac{1-\cos(2\cdot\frac{\alpha}{2})}{2}} = \sqrt{\sin^2(\frac{\alpha}{2})} = \sin(\frac{\alpha}{2})$ a $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ (pro lepší pochopení si křivku načrtněte). Tím dostaneme parametrizaci:

$$\mathcal{C}: \quad x(\alpha) = \tfrac{1}{2}(1+\cos\alpha)\ , \quad y(\alpha) = \tfrac{1}{2}\sin\alpha\ , \quad z(\alpha) = \sin(\tfrac{\alpha}{2}) \quad \text{pro} \quad \alpha \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

která má požadovanou orientaci.

**12.2** (délka křivky)

Určete délku křivky $C$, která je grafem funkce $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, $x \in \langle \frac{1}{2}, 2\rangle$.

**Řešení:**

Funkce $f$ má přirozenou parametrizaci $\varphi(x) = (x, \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x})$, $x \in \langle \frac{1}{2}, 2\rangle$. Tedy

$$\varphi'(x) = \left(1, \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}\right)$$

$$||\varphi'(x)|| = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{x^4 + 2 + \frac{1}{x^4}} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2} = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

Tedy délka grafu funkce je

$$\int_{\mathcal{C}} 1\ ds = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \|\varphi'(x)\|\ dx = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)\ dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = 4 + \frac{1}{3}\ .$$

**12.3** (křivkový integrál z funkce)

Spočítejte křivkový integrál z funkce $f(x,y) = xy^4$ podél křivky

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = 16 \quad \& \quad 0 \leq x\ .$$

**Řešení:**

Parametrizace poloviny kružnice $\mathcal{C}$ je $\varphi(t) = (4\cos t, 4\sin t)$ pro $t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\rangle$. Tedy

$$\varphi'(t) = (-4\sin t, 4\cos t) = 4(-\sin t, \cos t) \qquad ||\varphi'(t)|| = |4|\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 4$$

$$\int_{\mathcal{C}} f\ ds = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi(t)) \cdot ||\varphi'(t)||\ dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos t \cdot (4\sin t)^4 \cdot 4\ dt = 4^6 \left[\frac{\sin^5 t}{5}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \cdot 4^6}{5}\ .$$

**12.4** (křivkový integrál z vektorového pole)

Určete křivkový integrál $\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{s}$ z vektorového pole $\vec{F} = \Big(x + y,\ y - z,\ z^2\Big)$, kde $C$ má parametrizaci $\varphi(t) = (t^2, t^3, t^2)$, $t \in \langle 0, 1\rangle$ a orientaci určenou touto parametrizací.

**Řešení:**
Pro $\varphi(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big) = (t^2, t^3, t^2)$, $t \in [0, 1]$ máme

$$\varphi'(t) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \Big(2t,\ 3t^2,\ 2t\Big)$$

Takže můžeme psát

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_0^1 (x+y,\ y-z,\ z^2)_{|_{\varphi(t)}} \cdot \varphi'(t)\ dt = \int_0^1 (t^2+t^3,\ t^3-t^2,\ t^4) \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3t^2 \\ 2t \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_0^1 2t^3 - t^4 + 5t^5\ dt = \frac{2}{4} - \frac{1}{5} + \frac{5}{6} = \frac{17}{15}.$$

Definujme si tzv. rotaci pole jako

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z},\ \ -\frac{\partial F_3}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial z},\ \ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

kde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ je formálně definovaný vektor složený z operátorů parciálních derivací.

Pro *spojitě diferencovatelné* pole $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ na *jednoduše souvislé* množině $G \subseteq \mathbb{R}^3$ platí, že:

$$\vec{F} \text{ má potenciál} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{rot}(\vec{F}) = (0, 0, 0)$$

**12.5** (konzervativní pole, potenciál)

Najděte všechny hodnoty parametru $\alpha \in \mathbb{R}$ tak, aby pole

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + y,\quad y^2 + \alpha x,\quad ze^z)$$

bylo konzervativní, najděte jeho potenciál a hodnotu práce síly z bodu $A = (0, 1, 0)$ do $B = (-1, 1, 0)$.

**Řešení:**
Pole je definováno na celém $\mathbb{R}^3$, což je jednoduše souvislá množina. Pole $\vec{F}$ je spojitě diferencovatelné, tedy potenciál pole $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ bude existovat právě když $\mathrm{rot}(\vec{F}) = (0,0,0)$. Tedy rotace

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y & y^2 + \alpha x & ze^z \end{vmatrix} = (0-0, \quad 0-0, \quad \alpha - 1)\,,$$

je nulová na celém $\mathbb{R}^3$ právě když $\alpha = 1$ a pole $\vec{F}$ pak má potenciál.

Počítání rotace pole nám tedy sice rozhodne o existenci potenciálu, ale neurčí jeho tvar. Ten musíme zjistit dalším výpočtem, jehož postup v sobě také zahrnuje (případné) zjištění neexistence potenciálu (viz dále). Pokud nás tedy zajímá pouze (ne)existence potenciálu, je jednodušší a rychlejší spočítat rotaci a pokud chceme přímo potenciál najít, použijeme následující postup a v tom případě je počítání rotace zbytečné.

Potenciál je funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ taková, že

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= x^2 + y \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= y^2 + \alpha x \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= ze^z\,. \end{aligned}$$

Z první rovnice dostaneme

$$f(x,y,z) = \int (x^2 + y)\ dx = \frac{x^3}{3} + xy + C(y,z),$$

kde $C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je neznámá funkce závislá nyní pouze na $y$ a $z$. Nalezený tvar funkce $f$ teď dosadíme do druhé rovnice

$$y^2 + \alpha x = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3} + xy + C(y,z)\right) = x + \frac{\partial C}{\partial y}$$

tedy

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2 + (\alpha - 1)x.$$

Levá strana rovnice nezávisí na proměnné $x$, tedy i pravá strana na ní nesmí záviset, takže musí být $\alpha = 1$. Pak máme

$$\frac{\partial C}{\partial y}(y,z) = y^2.$$

Dostáváme $C(y,z) = \int y^2\ dy = \frac{y^3}{3} + D(z)$, kde $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je opět neznámá funkce závislá pouze na $z$. Zatím tedy máme

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)$$

a dosazením do poslední rovnice máme

$$ze^z = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + D(z)\right) = \frac{\partial D}{\partial z}.$$

Takže $D(z) = \int ze^z\ dz = (z-1)e^z + K$, kde $K \in \mathbb{R}$ je konstanta. Celkově tak máme potenciál

$$f(x,y,z) = \frac{x^3}{3} + xy + \frac{y^3}{3} + (z-1)e^z + K.$$

Práce pole pak je

$$\int\limits_A^B \vec{F}\, d\vec{s} = f(B) - f(A) = f(-1,1,0) - f(0,1,0) = -2 - \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{4}{3}\ .$$