13. cvičení z Matematické analýzy 2

15. - 19. května 2023

13.1 (Greenova věta)

Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly

$$\vec{F} = \left(2xy^3 + \operatorname{arctg}(x^2),\quad 4x^2y^2 - e^{-y^2}\right)$$

vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení:

Máme tedy oblast

$$M: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le x^3.$$

Její hranicí je po částech diferencovatelná křivka, která má orientaci odpovídající použití Greenovy věty.

Dále je

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 8xy^2 - 6xy^2 = 2xy^2$$

a proto

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\, dS = \iint\limits_M 2xy^2\, dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{x^3} 2xy^2\, dy\, dx = \int\limits_0^1 \frac{2}{3}x^{10}\, dx = \frac{2}{33}.$$

13.2 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole

$$\vec{F} = (xy^2,\ 2x^2y)$$

podél kladně orientované hranice $\mathcal{C}$ trojúhelníku M s vrcholy $(0,0)$, $(2,2)$ a $(2,4)$.

Řešení:

Pro oblast trojúhelníku

$$M: \quad 0 \le x \le 2 \quad \& \quad x \le y \le 2x$$

je orientace křivky $\mathcal{C}$ v souhlase s Greenovou větou. Pro vektorové pole $\vec{F} = (F_1, F_2)$ máme

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 4xy - 2xy = 2xy$$

Takže

$$\int\limits_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\, dS = \iint\limits_M 2xy\, dS = \int\limits_0^2 \int\limits_x^{2x} 2xy\, dy\, dx =$$

$$= \int\limits_0^2 x \underbrace{\left[y^2\right]_{y=x}^{y=2x}}_{4x^2-x^2}\, dx = \int\limits_0^2 3x^3\, dx = \frac{3 \cdot 16}{4} = 12\ .$$

13.3 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte obsah plochy v $\mathbb{R}^2$ omezené

(a) cykloidou $\varphi(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a osou x.

(b) křivkou C určenou parametrizací $\varphi(t) = (t - t^2,\ e^t)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, a osou y.

Řešení:

(a) Plochu E si vymezíme křivkami $\mathcal{C}_1$ (cykloida) a $\mathcal{C}_2$ (úsečka na ose x) tak, aby tyto křivky tvořily její okraj, který bude orientovaný v souladu s Greenovou větou. Cykloida

$$\mathcal{C}_1: \quad \varphi(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t), \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

má podle zadané parametrizace opačnou orientaci než potřebujeme. Pro úsečku je nejjednodušší si zvolit parametrizaci

$$\mathcal{C}_2: \quad \psi(t) = (t, 0), \quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

která je ve směru, který chceme.

Greenovu větu, pro (zatím nespecifikované) vektorové pole $\vec{F}(x,y) = \Big(F_1(x,y), F_2(x,y)\Big)$, pak použijeme takto:

$$\iint\limits_E \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\, dS = \int\limits_{\partial E} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int\limits_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$$

kde znaménka u křivek odpovídají tomu, jestli daná křivka má nebo nemá orientaci v souladu s Greenovou větou.

Teď už jen zbývá si zvolit vhodné vektorové pole a to tak, aby $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$. Pak totiž bude

$$\text{obsah}(E) = \iint\limits_E \underbrace{1}_{\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}}\, dS = \cdots = -\int\limits_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}\ .$$

Takových voleb je mnoho, ale pro nás bude nejlepší nějaká jednoduchá, např. $\frac{\partial F_2}{\partial x} = 1$ a $\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0$, tj. $\vec{F} = (0, x)$. Pro takovouto volbu bude i integrál $\int\limits_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}$ nulový, protože $\vec{F}$ je kolmé k ose x, takže při pohybu ve vodorovném směru nekoná práci. Ale stejně si nulovost ještě ověříme i explicitně.

Takže máme

pro cykloidu: $\varphi(t) = (\underbrace{t - \sin t}_{=x(t)},\ \underbrace{1 - \cos t}_{=y(t)}), \qquad \varphi'(t) = (1 - \cos t,\ \ \sin t)$

pro úsečku: $\psi(t) = (\underbrace{t}_{=x(t)},\ \underbrace{0}_{=y(t)}), \qquad \psi'(t) = (1,\ \ 0)$

a po dosazení dostaneme

$$\text{obsah}(E) = -\int\limits_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} + \int\limits_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} = -\int\limits_0^{2\pi} \mathbf{F}(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\ dt + \int\limits_0^{2\pi} \mathbf{F}(\psi(t))\cdot\psi'(t) =$$

$$= -\int\limits_0^{2\pi} (0,\ \ t - \sin t)\cdot\begin{pmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\ dt + \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{(0,\ \ t)\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{=0}\ dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} t \cdot (-\sin t) + \sin^2 t \ dt = \underbrace{[t\cos t]_0^{2\pi}}_{=2\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos t \ dt}_{=0} + \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2 t \ dt}_{=\pi} = 2\pi - 0 + \pi = 3\pi \ .$$

(b) Budeme postupovat podobně jako v (a). Plochu E si vymezíme křivkami $\mathcal{C}$, která se nachází v 1. kvadrantu a jde z $(0,0)$ do $(0,e)$, a úsečkou $\mathcal{D}$ na ose y, která půjde opačným směrem - tedy z $(0,e)$ do $(0,0)$. Okraj E tak bude orientovaný v souladu s Greenovou větou.

Pole si tentokrát zvolíme kolmé k ose y, tj. $\vec{F} = (F_1, 0)$ a z podmínky $1 = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{\partial F_1}{\partial y}$ máme např. volbu $\vec{F} = (-y, 0)$. Pro takovouto volbu bude i integrál $\int_{\mathcal{D}} \vec{F} \cdot d\mathbf{s}$ nulový.

Takže pro $\mathcal{C}$ máme

$$\varphi(t) = (t - t^2, \quad e^t), \quad \varphi'(t) = (1 - 2t, \quad e^t)$$

a po dosazení dostaneme

$$\text{obsah}(E) = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\mathbf{s} + \underbrace{\int_{\mathcal{D}} \vec{F} \cdot d\vec{s}}_{=0} = \int_0^1 \vec{F}(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \int_0^1 (-e^t, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1-2t \\ e^t \end{pmatrix} \ dt =$$

$$= \int_0^1 2te^t - e^t \ dt = \left[2te^t\right]_0^1 - \int_0^1 2e^t \ dt - \int_0^1 e^t \ dt = 2e - \left[3e^t\right]_0^1 = 3 - e \ .$$

Připomenutí: Integrál z funkce $f : M \to \mathbb{R}$ je určený jako

$$\iint_M f \ dS = \iint_U f(\Phi(u,v)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| \ dS \ ,$$

kde $\Phi : U \to M$ je vhodná parametrizace.

13.4 (obsah plochy)

Spočítejte obsah plochy M

(a) na polosféře $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ vymezené válcem $x^2 + y^2 \leq x$.

(b) na paraboloidu $z = x^2 + y^2$ vymezené $z \leq 1$.

Řešení:

(a) Plochu M si můžeme zparametrizovat jako graf funkce $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$:

$$\Phi(x,y) = (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$$

s definičním oborem

$$U : \quad x^2 + y^2 \leq x.$$

Máme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= (\quad 1, \quad 0, \quad -\tfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= (\quad 0, \quad 1, \quad -\tfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= (\quad \tfrac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad \tfrac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad 1) \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Takže

$$\text{obsah}(M) = \iint\limits_M 1 \; dS = \iint\limits_U \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| \; dx \; dy = \iint\limits_U \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \; dx \; dy$$

Kruh

$$U: \; x^2 + y^2 \leq x$$

můžeme přepsat jako $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$. Použijeme tedy polární souřadnice. Vzhledem k tvaru funkce v integrálu ale bude lepší použít je se středem v počátku a NE s posunutým středem do bodu $(0, \frac{1}{2})$. Tedy parametrizace U je

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\tfrac{\pi}{2} \leq \varphi &\leq \tfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq r &\leq \cos\varphi \end{aligned}$$

a proto

$$\text{obsah}(M) = \dots = \iint\limits_U \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \; dx \; dy = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{\cos\varphi} \frac{r}{\sqrt{1-r^2}} \; dr \; d\varphi =$$

$$= \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{1-r^2}\right]_0^{\cos\varphi} \; d\varphi = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - |\sin\varphi| \; d\varphi = 2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin\varphi \; d\varphi = 2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \pi - 2.$$

(b) Plochu M opět zparametrizujeme jako graf funkce $z = x^2 + y^2$:

$$\Phi(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2 + y^2 \leq 1.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} &= (\quad 1, \quad 0, \quad 2x) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial y} &= (\quad 0, \quad 1, \quad 2y) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} \times \tfrac{\partial \Phi}{\partial y} &= (\; -2x, \; -2y, \quad 1) \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| = \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1}.$$

Takže

$$\text{obsah}(M) = \iint\limits_M 1 \; dS = \iint\limits_U \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right\| \; dx \; dy = \iint\limits_U \sqrt{4x^2 + 4y^2 + 1} \; dx \; dy = \left\{ \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{4r^2+1}\cdot r\ dr\ d\varphi = 2\pi\left[\frac{(4r^2+1)^{3/2}}{12}\right]_0^1 = \frac{\pi}{6}(\sqrt{8}-1).$$

13.5 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

(i)
$$\iint_M z^2\ dS,$$
kde M je částí válce $x^2+y^2=1$ mezi rovinami $z=0$ a $z=x+1$.

(ii)
$$\iint_M z\ dS,$$
kde M je částí válce $x^2+y^2=2$ vymezená rovinou $z=0$ a plochou $z=x^2+(y-1)^2$.

(iii)
$$\iint_M x+z^2y\ dS,$$
kde M je částí válce $x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 3$ ležící v prvním oktantu.

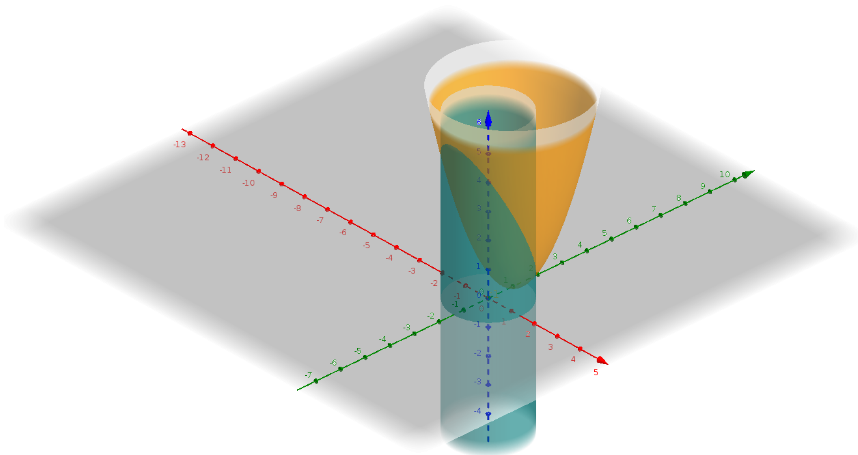
Řešení:
(i) Plocha je určena jako
$$M:\quad x^2+y^2=1 \quad \& \quad 0\le z\le x+1.$$
Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako
$$\Phi(\varphi,h)=(\cos\varphi,\sin\varphi,h)$$
s definičním oborem
$$U:\quad 0\le\varphi\le 2\pi \quad \& \quad 0\le h\le 1+\cos\varphi.$$
Máme
$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (-\sin\varphi,\quad \cos\varphi,\quad 0)\\
\tfrac{\partial\Phi}{\partial h} &= (\qquad 0,\qquad 0,\quad 1)\\
\tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\tfrac{\partial\Phi}{\partial h} &= (\ \cos\varphi,\quad \sin\varphi,\quad 0)
\end{aligned}$$
$$\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial h}\right\| = 1.$$
Takže
$$\iint_M z^2\ dS = \iint_U h^2\cdot\left\|\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\times\frac{\partial\Phi}{\partial h}\right\|\ d\varphi\ dh = \int_0^{2\pi}\int_0^{1+\cos\varphi} h^2\ dz\ d\varphi = \int_0^{2\pi}\frac{(1+\cos\varphi)^3}{3}\ d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3} + \cos\varphi + \cos^2\varphi + \frac{\cos^3\varphi}{3} \right) \, d\varphi = \frac{2}{3}\pi + 0 + \pi + 0 = \frac{5}{3}\pi.$$

- -

(ii) Plocha je určena jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \le z \le x^2 + (y-1)^2.$$



Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ y &= r\sin\varphi \\ z &= h \end{aligned}$$

kde po dosazení z první podmínky dostaneme $r^2 = 2$ a po dosazeni $r = \sqrt{2}$ z druhé podmínky pak

$$0 \le h \le (\sqrt{2}\cos\varphi)^2 + (\sqrt{2}\sin\varphi - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi$$

Tím dostaneme předpis

$$\Phi(\varphi, h) = (\sqrt{2}\cos\varphi, \sqrt{2}\sin\varphi, h)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le h \le 3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi.$$

Dále je

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= (-\sqrt{2}\sin\varphi, \quad \sqrt{2}\cos\varphi, \quad 0) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial h} &= (\quad 0, \quad 0, \quad 1) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \tfrac{\partial\Phi}{\partial h} &= (\sqrt{2}\cos\varphi, \quad \sqrt{2}\sin\varphi, \quad 0) \end{aligned}$$

$$\left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial h} \right\| = \sqrt{2}.$$

Takže

$$\iint_M z \, dS = \iint_U h \cdot \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial h} \right\| \, d\varphi \, dh = \int_0^{2\pi} \int_0^{3-2\sqrt{2}\sin\varphi} h \cdot \sqrt{2} \, dh \, d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \frac{(3 - 2\sqrt{2}\sin\varphi)^2}{2} \, d\varphi =$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} - 6\sqrt{2} \sin \varphi + 4 \sin^2 \varphi \right) \, d\varphi = \sqrt{2}(9\pi + 0 + 4\pi) = 13\sqrt{2}\pi.$$

- -

(iii) Plocha je určena jako

$$M: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad 0 \le z \le 3 \quad \& \quad 0 \le x, y.$$

Její parametrizaci vytvoříme pomocí cylindrických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi, h) = (\cos \varphi, \sin \varphi, h)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le h \le 3.$$

Máme stejně jako v (i)

$$\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial h} \right\| = 1.$$

Takže

$$\iint_M x + z^2 y \, dS = \iint_U (\cos \varphi + h^2 \sin \varphi) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial h} \right\| \, d\varphi \, dh = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 (\cos \varphi + h^2 \sin \varphi) \cdot 1 \, dh \, d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^3 1 \, dh \right) + \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \, d\varphi \right) \cdot \left(\int_0^3 h^2 \, dh \right) = 3 + \frac{27}{4} = \frac{39}{4}.$$

Připomenutí: Tok vektorového pole $\vec{F}: M \to \mathbb{R}^3$ orientovanou plochou $M \subseteq \mathbb{R}^3$ se spočítá jako

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(u, v)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) dS \ ,$$

kde $\Phi: U \to M$ je opět vhodná parametrizace, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, a orientace daná vektorovým polem $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}$ souhlasí se zadanou parametrizací plochy M. (Pokud by orientace nesouhlasila, stačí jen změnit pořadí ve vektorovém součinu, tj. změnit znaménko integrálu.)

13.6 (plošný integrál z vektorového pole - tok)
Spočítejte

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde

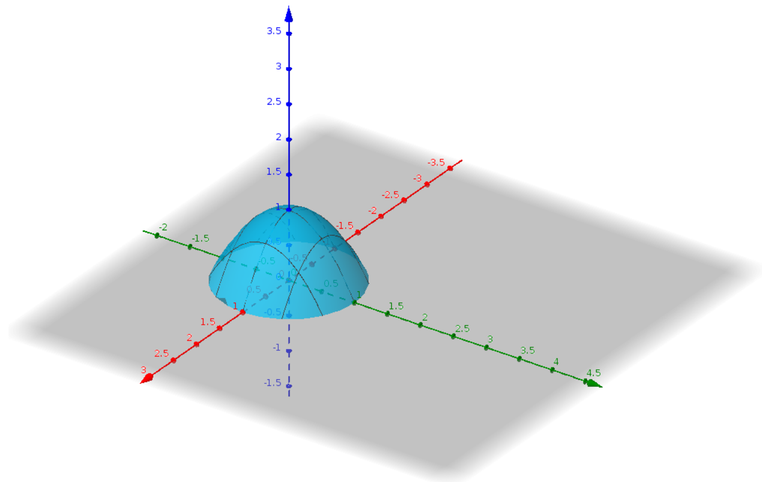
(i) $\vec{F}(x, y, z) = (-x, \ -y, \ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \ge 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

(ii) $\vec{F}(x, y, z) = (x, \ -z, \ y)$ a M je částí sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v 1. oktantu s orientací směrem do počátku.

(iii) $\vec{F}(x, y, z) = (y, \ -x, \ x^2 + y^2)$ a M je část paraboloidu $z = x^2 + y^2$, $z \le 2$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení:

(i)



Plochu M zparametrizujeme přirozeně jako graf funkce:

$$\Phi(x,y) = \Big(x,\ y,\ 1-x^2-y^2\Big)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2+y^2 \le 1.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -2x\big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -2y\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \big(2x, \quad 2y, \quad 1\big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint\limits_M \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big)\cdot\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\times\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dS \;= \iint\limits_U (x,y,1-x^2-y^2)\cdot\begin{pmatrix}2x\\2y\\1\end{pmatrix}dS \;=$$

$$= \iint\limits_U (1+x^2+y^2)\ dS = \begin{bmatrix} {\scriptstyle x=r\cos\varphi} \\ {\scriptstyle y=r\sin\varphi} \\ {\scriptstyle 0\le r\le 1} \\ {\scriptstyle 0\le\varphi\le 2\pi} \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^1 (1+r^2)r\ drd\varphi = \left(\int\limits_0^1 (1+r^2)r\ dr\right)\cdot\left(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) =$$

$$= 2\pi\left[\frac{(1+r^2)^2}{4}\right]_{r=0}^{r=1} = 2\pi\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{2}\pi.$$

- -

(ii) Plochu M zparametrizujeme tentokrát pro změnu pomocí sférických souřadnic jako

$$\Phi(\varphi,\vartheta) = (\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \cos\vartheta)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2}.$$

(Ale lze použít i parametrizaci M jako graf funkce.)

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial\varphi} &= \big(-\sin\vartheta\sin\varphi, \quad \sin\vartheta\cos\varphi, \quad 0 \big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} &= \big(\cos\vartheta\cos\varphi, \quad \cos\vartheta\sin\varphi, \quad -\sin\vartheta \big) \end{aligned}$$

a odsud je

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} = \big(-\sin^2\vartheta\cos\varphi, \ -\sin^2\vartheta\sin\varphi, \ -\sin\vartheta\cos\vartheta \big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je záporná (na vnitřku definičního oboru), takže pole je orientované v souladu se zadáním. Takže máme

$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_U \vec{F}\big(\Phi(\varphi,\vartheta)\big) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} \right) dS \ =$$

$$= \iint_U (\sin\vartheta\cos\varphi, \ -\cos\vartheta, \ \sin\vartheta\sin\varphi) \cdot \begin{pmatrix} -\sin^2\vartheta\cos\varphi \\ -\sin^2\vartheta\sin\varphi \\ -\sin\vartheta\cos\vartheta \end{pmatrix} dS \ =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\sin^3\vartheta \cdot \cos^2\varphi \ d\varphi = -\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2\vartheta)\sin\vartheta \ d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} \ d\varphi \right) =$$

$$= -\Big[-\cos\vartheta + \frac{\cos^3\vartheta}{3} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \Big[\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(2\varphi)}{4} \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} \ .$$

- -

(iii) Plochu M zparametrizujeme přirozeně jako graf funkce:

$$\Phi(x,y) = \Big(x, \ y, \ x^2+y^2 \Big)$$

s definičním oborem

$$U: \quad x^2+y^2 \le 2.$$

Máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial\Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad 2x\big) \\ \tfrac{\partial\Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad 2y\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} \times \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \big(-2x, \quad -2y, \quad 1 \big).$$

Třetí složka tohoto vektoru je kladná, takže toto pole je orientované v souhlase se zadáním. Takže máme

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \vec{F}\big(\Phi(x,y)\big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS \ = \iint\limits_U (y, -x, x^2+y^2) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dS \ =$$

$$= \iint\limits_U (x^2+y^2)\ dS = \begin{bmatrix} \scriptstyle x=r\cos\varphi \\ \scriptstyle y=r\sin\varphi \\ \\ \scriptstyle 0\le r\le\sqrt{2} \\ \scriptstyle 0\le\varphi\le 2\pi \end{bmatrix} = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\sqrt{2}} r^2 \cdot r\ dr d\varphi = \left(\int\limits_0^{\sqrt{2}} r^3\ dr\right) \cdot \left(\int\limits_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right) =$$

$$= \frac{(\sqrt{2})^4}{4} \cdot 2\pi = 2\pi.$$