14. cvičení z Matematické analýzy 2

22. - 26. května 2023

Gaussova věta

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV$$

dává do souvislosti tok pole $\vec{F}$ přes okraj $M = \partial E$ oblasti E v $\mathbb{R}^3$ s integrálem přes tuto oblast E. Okraj ∂E má zde vždy vnější orientaci. Funkce

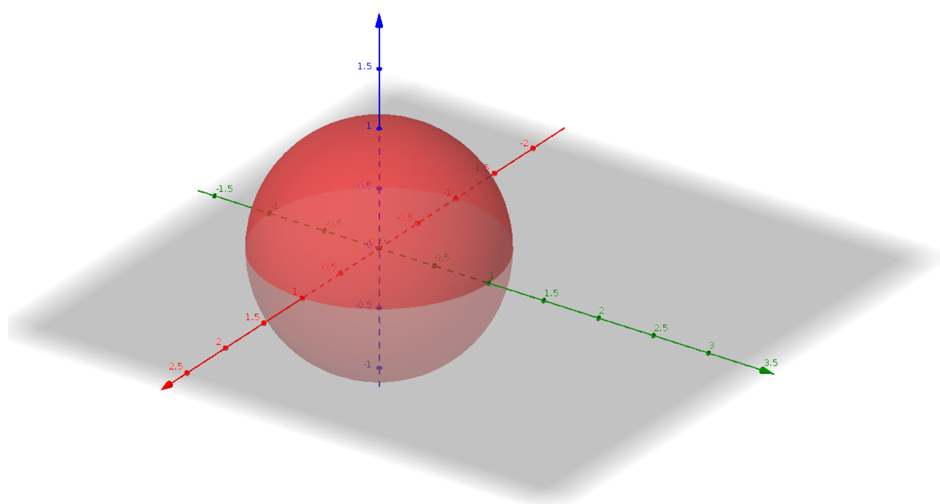
$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z},$$

která se integruje v M se nazývá divergence pole $\vec{F}$ a interpretuje se jako "zdroj" pole v daném bodě (při kladné hodnotě) případně "odtok" pole v daném bodě (při záporné hodnotě). Smyslem Gaussovy věty tedy je, že celková "změna pole" v objemu odpovídá příslušnému toku pole přes okraj.

14.1 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty spočítejte tok vektorového pole $\vec{F}(x, y, z) = (4x,\ y,\ 4z)$ a sférou $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ s vnější orientací.

Řešení:



Máme

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

a

$$\partial E: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 4\ .$$

Orientace okraje $M = \partial E$ je dána vnější normálou.

Máme

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 4 + 1 + 4 = 9$$

a Gaussova věta nám dává

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint_{E} 9\ dV = 9 \cdot \text{objem}(E) = 9 \cdot \frac{4}{3}\pi 2^3 = 96\pi.$$

14.2 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete tok pole $\vec{F}(x,y,z) = (y^2,\ xz^3,\ (z-1)^2)$ povrchem tělesa E ohraničeného plochami $x^2+y^2=16$, $z=1$ a $z=5$. Povrch má vnější orientaci.

Řešení:
Oblast E je válec.

Tedy
$$E: \quad x^2+y^2 \leq 16, \quad 1 \leq z \leq 5$$
. Divergence pole je
$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 0+0+2(z-1) = 2(z-1)\ .$$
Protože v Gaussově větě budeme integrovat přes E využijeme substituce přes válcové souřadnice:
$$\Phi: \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{array}$$
s oblastí parametrizace
$$U: \quad 0 \leq r \leq 4, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 1 \leq h \leq 5$$
Pro povrch $M = \partial E$ s vnější normálou pak máme z Gaussovy věty, že
$$\iint_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint_E 2\,(z-1)\ dV = \iiint_U 2\,(h-1)\,r\ dh\ dr\ d\varphi =$$
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^4\int_1^5 2(h-1)r\ dh\ dr\ d\varphi = \left(\int_0^{2\pi} 1\ d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^4 r\ dr\right)\cdot\left(\int_1^5 2(h-1)\ dh\right) =$$
$$= 2\pi\cdot\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^4\cdot\left[(h-1)^2\right]_1^5 = 256\pi.$$

14.3 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete tok pole $\vec{F}(x,y,z) = (x,\ y^2,\ y+z)$ povrchem tělesa E ohraničeného plochami $x^2+y^2=4$, $z=x$ a $z=4$. Povrch má vnější orientaci.

Řešení:
Oblast E je vnitřek válce, který je shora omezen rovinou $z=4$ a zdola seříznut rovinou $z=x$.

Tedy
$$E: \quad x^2+y^2 \leq 4,\ x \leq z \leq 4$$
. Divergence pole je
$$\operatorname{div}(\vec{F}) = 1+2y+1 = 2(1+y)\ .$$
Protože v Gaussově větě budeme integrovat přes E využijeme substituce přes válcové souřadnice:
$$\Phi: \begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = h \end{array}$$

s oblastí parametrizace

$$U: \quad 0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ r\cos\varphi \le h \le 4$$

kterou získáme snadno jednak z náčrtu (rozsah φ) a jednak dosazením substituce do nerovnic popisujících množinu R. Pro povrch $M = \partial E$ s vnější normálou pak máme z Gaussovy věty, že

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint_E 2\,(1+y)\ dV = \iiint_U 2\,(1 + r\sin\varphi)\,r\ dh\ dr\ d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2\int_{r\cos\varphi}^4 (r + r^2\sin\varphi)\ dh\ dr\ d\varphi = 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 \underbrace{(r + r^2\sin\varphi)(4 - r\cos\varphi)}_{4r - r^2\cos\varphi + 4r^2\sin\varphi - r^3\cos\varphi\sin\varphi}\ dr\ d\varphi =$$

$$= 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 4r\ dr\ d\varphi - 2\int_0^{2\pi}\int_0^2 r^2\cos\varphi + 4r^2\sin\varphi - r^3\underbrace{\cos\varphi\sin\varphi}_{\frac{1}{2}\sin(2\varphi)}\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} 2\ d\varphi\right)\cdot\left(\int_0^2 r^2\ dr\right) + 0 = 4\pi\cdot\frac{8}{3} = \frac{32}{3}\pi.$$

Zde jsme využili nulovosti integrálu přes periodu funkcí $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ a $\sin(2\varphi)$.

14.4 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty pro vektorové pole

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(xy,\ yz,\ xz\big)$$

určete

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

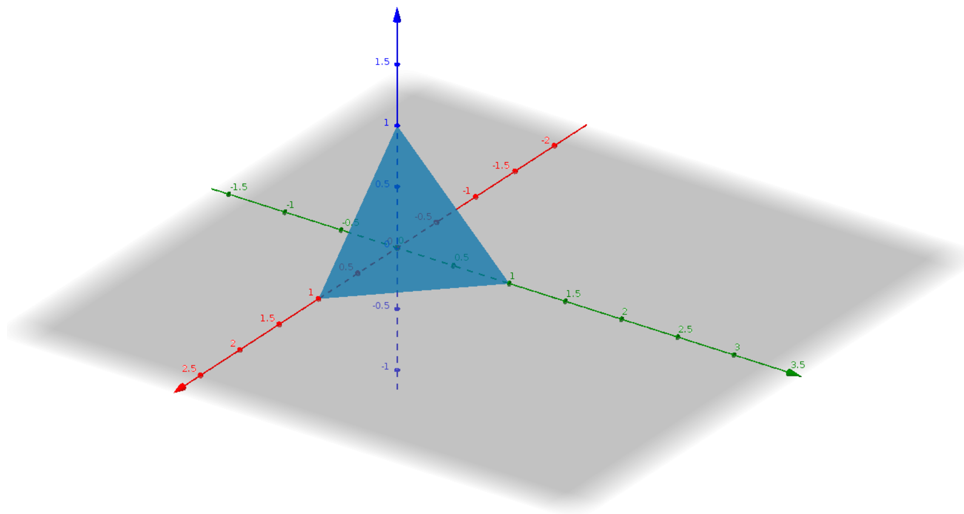
kde plocha je

(a) $M: \quad x + y + z = 1 \ \ \&\ \ x,y,z \ge 0$ a je orientovaná směrem vzhůru.

(b) $M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \ \&\ \ x,y,z \ge 0$ a je orientovaná směrem vzhůru.

Řešení:

(a)



Abychom mohli použít Gaussovu větu, potřebujeme nějakou trojrozměrnou oblast E, jejíž okraj ∂E bude obsahovat plochu M a kde tok pole zbytkem okraje, tj. orientovanou plochou $\partial E \setminus M$ bude nulový.

Jestliže si zvolíme čtyřstěn

$$E : \quad x + y + z \le 1 \;\; \& \;\; x, y, z \ge 0$$

pak se jeho okraj ∂E skládá z plochy M (jejíž zadaná orientace odpovídá vnější orientaci) a tří trojúhelníků Δ_1, Δ_2 a Δ_2 (jejichž orientaci si zvolíme také jako "vnější"). Pole $\vec{F}$ na trojúhelníku

$$\Delta_1 : \quad x = 0 \;\; \& \;\; y + z \ge 1 \;\; \& \;\; y, z \ge 0$$

je tvaru $\vec{F}(0, y, z) = \big(0,\ yz,\ 0\big)$ a je proto rovnoběžné s plochou tohoto trojúhelníka (neboli toto pole $\vec{F}$ je kolmé na normálové vektorové pole $\vec{N}_1 = (-1, 0, 0)$ plochy trojúhelníka, tj. $\vec{F} \cdot \vec{N}_1 = 0$). Proto bude

$$\iint_{\Delta_1} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Delta_1} (\vec{F} \cdot \vec{N}_1)\ dS = 0\ .$$

A podobně to dopadne i pro zbylé trojúhelníky.

Celkově tedy budeme mít, že (při vnější orientaci okraje ∂E) bude

$$\iint_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} + \sum_{i=1}^{3} \underbrace{\iint_{\Delta_i} \vec{F} \cdot d\vec{S}}_{=0} = \iint_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S}\ .$$

Teď tedy použijeme Gaussovu větu. Spočítáme si divergenci

$$\operatorname{div}(\vec{F}) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = y + z + x\ .$$

a čtyřstěn E si rozřežeme (kvůli Fubiniově větě) např. jako

$$E : \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 0 \le y \le 1 - x \quad \& \quad 0 \le z \le 1 - x - y$$

Máme tedy

$$\iint_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_{E} \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} x + y + z\ dz\ dy\ dx =$$

$$= \int_0^1 \int_0^{1-x} \left[(x+y) + \frac{1}{2}(1-x-y) \right] (1-x-y)\ dy\ dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{1-x} 1-(x+y)^2\ dy\ dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[y - \frac{(x+y)^3}{3} \right]_{y=0}^{y=1-x} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3}\ dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{8}\ .$$

(b) Budeme postupovat podobně jako v (a). Plochu doplníme, abychom získali povrch oblasti

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ \ \& \ \ x, y, z \geq 0$$

kde tok zbylými stěnami bude opět nulový. Máme tedy podobně jako v (a), že

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial E} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \operatorname{div}(\vec{F})\ dV = \iiint_E x + y + z\ dV =$$

$$= \begin{bmatrix} x=\varrho\sin\vartheta\cos\varphi \\ y=\varrho\sin\vartheta\sin\varphi \\ z=\varrho\cos\vartheta \\ \\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2} \\ 0\leq\vartheta\leq\frac{\pi}{2} \\ 0\leq\varrho\leq 1 \end{bmatrix} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \varrho(\sin\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta) \cdot \varrho^2 \sin\vartheta\ d\varrho\ d\varphi\ d\vartheta\ =$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^1 \varrho^3\ \mathrm{d}\varrho \right)}_{=\frac{1}{4}} \cdot \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta(\cos\varphi + \sin\varphi) + \cos\vartheta\sin\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta \right)}_{=\frac{\pi}{4}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi + \cos\varphi\ \mathrm{d}\varphi \right)}_{=2} + \frac{1}{4} \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta \right)}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\ \mathrm{d}\varphi \right)}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{16}\pi\ .$$

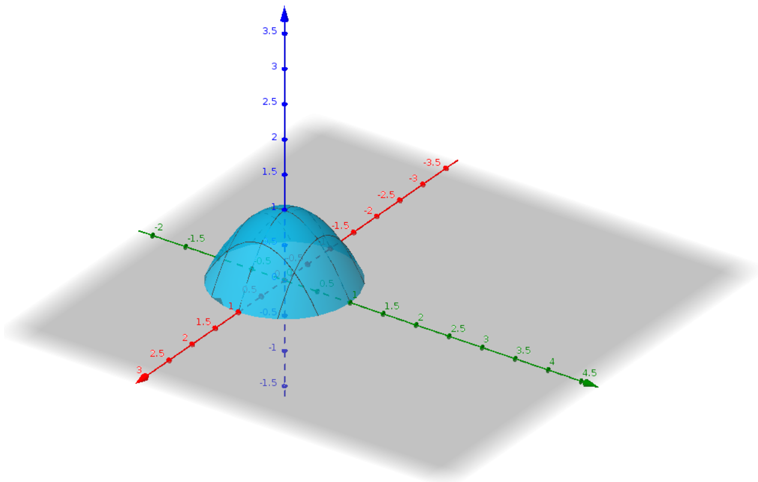
14.5 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (x,\ y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení:



Budeme postupovat podobně jako v příkladu **14.11**. Plocha M spolu s kruhem

$$K: \quad x^2+y^2 \leq 1 \quad \& \quad z=0$$

(jehož orientace je směrem dolů) tvoří hranici ∂E (s vnější orientací) pro těleso

$$E: \quad 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\ .$$

Pole na kruhu K má tvar $\vec{F}(x,y,0)=(x,\ y,\ 0)$ a je tedy rovnoběžné z plochou kruhu. Proto je

$$\iint_K \vec{F}\cdot d\vec{S} = 0\ .$$

Tudíž díky Gaussově větě pak budeme mít:

$$\iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iint_M \vec{F}\cdot d\vec{S} + \underbrace{\iint_K \vec{F}\cdot d\vec{S}}_{=0} = \iint_{\partial E} \vec{F}\cdot d\vec{S} = \iiint_E \underbrace{\mathrm{div}(\vec{F})}_{=1+1+1=3}\ dV = \iiint_E 3\ dV =$$

$$= \begin{bmatrix} x=r\cos\varphi \\ y=r\sin\varphi \\ z=h \\ \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \\ 0\leq r\leq 1 \\ 0\leq z\leq 1-r^2 \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{1-r^2} 3r\ dh\ dr\ d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^1 3r(1-r^2)\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^1 (r-r^3)\ dr\right)\cdot\left(\int_0^{2\pi} 3\ d\varphi\right) = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)6\pi = \frac{3}{2}\pi\ .$$

Stokesova věta je zobecnění Greenovy věty z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^3$ (orientovaná plocha, jejímž okrajem je křivka $\mathcal{C}$, už může být různě zakřivená v prostoru):

$$\int_{\mathcal{C}=\partial M} \vec{F}\cdot d\vec{s} = \iint_M \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{S}\ ,$$

kde

$$\mathrm{rot}(\vec{F}) := \nabla\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z},\ -\left(\frac{\partial F_3}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial z}\right),\ \frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\ .$$

Orientace plochy a jejího okraje musí být v souladu a to pomocí pravidla pravé ruky (ruku položíme na plochu poblíž okraje tak, aby vektor její orientace mířil do dlaně a palec ukazoval směrem dovnitř plochy - pak zbylé prsty ukazují směr orientace okraje), nebo jednodušeji - když obcházíme plochu podél okraje, musíme ji aktuálně mít vždy po levé straně.

14.6 (Stokesova věta)
Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

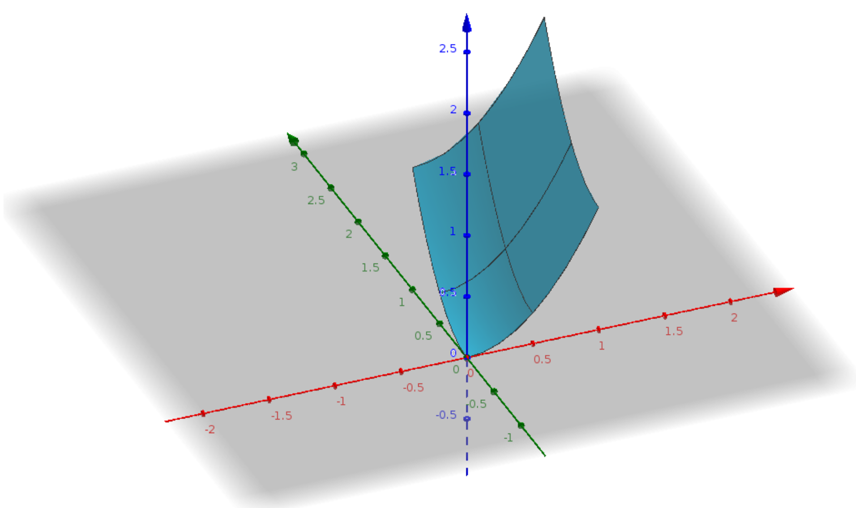
kde křivka $\mathcal{C}$ je hranicí plochy $M: \quad z = x^2 + y^2, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$ a pole je a

(i) $\vec{F} = (x, y, xy)$,

(ii) $\vec{F} = (x, -z, xy)$.

Křivka $\mathcal{C}$ je orientována kladně při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz kladnou orientaci).

Řešení:
Abychom mohli použít Stokesovu větu, musíme si zvolit správnou orientaci příslušné plochy M tak, aby byla v souladu s orientací křivky $\mathcal{C}$, která tvoří její okraj.



Plocha M je grafem funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$, takže ji budeme orientovat směrem nahoru a přirozeněji zparametrizujeme pomocí

$$\Phi(x,y) = \Big(x, y, f(x,y)\Big) = (x, y, x^2 + y^2)$$

s definičním oborem

$$U: \quad 0 \le x \le 1 \;\;\&\;\; 0 \le y \le 1\ .$$

Máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = (1, 0, 2x)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = (0, 1, 2y)$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = (-2x, -2y, 1)$$

Třetí složka vektoru $\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ je kladná, tedy tento normálový vektor odpovídá zadané orientaci plochy “nahoru.” Rotace pole $\vec{F}$ je:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & xy \end{vmatrix} = \big(x,\ -y,\ 0\big)\ .$$

Máme tak

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \operatorname{rot}(\vec{F})(\Phi(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS = \iint\limits_U (x, -y, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dS =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \big(2y^2 - 2x^2\big)\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 2y^2\ dx\ dy - \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 2x^2\ dy\ dx = 0\ .$$

(ii) Postupujeme jako v části (i). Rotace pole $\vec{F}$ je:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & -z & xy \end{vmatrix} = \big(x+1,\ -y,\ 0\big)\ .$$

Máme tak

$$\int\limits_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_M \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_U \operatorname{rot}(\vec{F})(\Phi(x,y)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS = \iint\limits_U (x+1, -y, 0) \cdot \begin{pmatrix} -2x \\ -2y \\ 1 \end{pmatrix} dS =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \big(2y^2 - 2x^2 - 2x\big)\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 2y^2\ dx\ dy - \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 2x^2\ dy\ dx - \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 2x\ dy\ dx = 1\ .$$

Zde jsme využili nulovost integrálu přes periodu funkcí $\sin\varphi$ a $\cos(2\varphi)$.

14.7 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F} = (1,\ x+yz,\ xy - \sqrt{z})$ a $\mathcal{C}$ je hranice části roviny $3x + 2y + z = 1$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v kladném smyslu při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz kladnou orientaci).

Řešení:

Plocha M je trojúhelník. Orientace plochy v souladu s orientací okraje je tedy směrem nahoru. Dále máme

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 1 & x+yz & xy-\sqrt{z} \end{vmatrix} = \big(x-y,\ -y+0,\ 1-0\big)\ .$$

Plochu zparametrizujeme jako graf funkce $z = 1 - 3x - 2y$, tedy

$$\Phi(x,y) = (x, y, 1 - 3x - 2y)$$

pomocí množiny

$$U: \quad 0 \le x \le \tfrac{1}{3} \;\;\&\;\; 0 \le y \le \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}x \; .$$

(U je jen projekcí M do roviny xy). Pro tečné vektory máme

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial \Phi}{\partial x} &= \big(1, \quad 0, \quad -3\big) \\ \tfrac{\partial \Phi}{\partial y} &= \big(0, \quad 1, \quad -2\big) \end{aligned}$$

a

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \big(3, 2, 1\big).$$

Tento vektorový součin má správný směr takže máme

$$\int\limits_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \iint\limits_{U} \Big(\operatorname{rot}(\vec{F}) \circ \Phi\Big) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \times \frac{\partial \Phi}{\partial y}\right) dS =$$

$$= \iint\limits_{U} (x - y, \; -y, \; 1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} dS = \iint\limits_{U} (3x - 5y + 1) \; dS = \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \int\limits_{0}^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x} 3x - 5y + 1 \; dy \; dx =$$

$$= \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} (3x+1)(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}x) - \tfrac{5}{2}(\tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{2}x)^2 \; dx = \int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \tfrac{1}{2}(1 - 9x^2) - \tfrac{5}{8}(1 - 3x)^2 \; dx =$$

$$= \tfrac{1}{6} - \tfrac{3}{2}(\tfrac{1}{3})^3 - \tfrac{5}{72}\left[(1 - 3x)^3\right]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{13}{72} \; .$$

14.8 (Stokesova věta)
Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

kde

(a) $\vec{F} = \big(ze^y, \; x\cos y, \; xz\sin y\big)$ a M je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ a $y \ge 0$ a její normálové pole má nezápornou druhou složku.

(b) $\vec{F} = (xyz, x, e^{xy}\cos z)$ a M je kužel $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ a $z \ge 0$ s orientací směrem vzhůru.

Řešení:
(a) Máme

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 16 \;\;\&\;\; y \ge 0$$

s okrajem

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + z^2 = 16 \quad \& \quad y = 0.$$

Okraj $\mathcal{C}$ plochy M tedy orientujeme směrem od osy z k ose x (po kratší dráze) dané.

Křivka $\mathcal{C}$ má parametrizaci

$$\varphi(\alpha) = (x(\alpha),\ y(\alpha),\ z(\alpha)) = (4\cos\alpha,\ 0,\ 4\sin\alpha), \qquad 0 \le \alpha \le 2\pi\ .$$

a orientace této parametrizace je opačná než ta, co jsme si zvolili.

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (x'(\alpha),\ y'(\alpha),\ z'(\alpha)) = (-4\sin\alpha,\ 0,\ 4\cos\alpha)$$

a tok pole $\mathrm{rot}(\vec{F})$ plochou M je podle Stokesovy věty

$$\iint_M \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{2\pi} \vec{F}(\varphi(\alpha)) \cdot \varphi'(\alpha)\ d\alpha =$$

$$= -\int_0^{2\pi} (4\sin\alpha,\ 4\cos\alpha, 0) \cdot \begin{pmatrix} -4\sin\alpha \\ 0 \\ 4cos\alpha \end{pmatrix}\ d\alpha = 16\int_0^{2\pi} \sin^2\alpha\ d\alpha = 16\pi.$$

(b) Máme

$$M: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \ \ \&\ \ z \ge 0$$

a

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad z = 0.$$

Plocha M je orientovaná směrem "nahoru" a orientace jejího okraje $\mathcal{C}$ tedy odpovídá orientaci dané např. parametrizací

$$\varphi(\alpha) = (\cos\alpha,\ \sin\alpha,\ 0), \quad 0 \le \alpha \le 2\pi\ .$$

Máme tedy

$$\varphi'(\alpha) = (-\sin\alpha,\ \cos\alpha,\ 0)$$

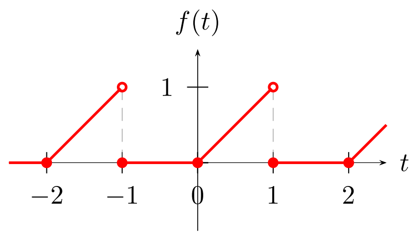
$$\iint_M \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi} (0, \cos\alpha, e^{\sin\alpha\cos\alpha}) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}\ d\alpha = \int_0^{2\pi} \cos^2\alpha\ d\alpha = \pi.$$

K Fourierovým řadám - viz Poznámky.

14.9 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} t & , \ t \in [0,1), \\ 0 & , \ t \in [1,2). \end{cases}$$

(tj. funkci s periodou $T = 2$) a určete její součet.



Řešení:

Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = 2$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$ a $\frac{2}{T} = 1$.

$$a_0 = \tfrac{2}{2} \int_0^2 f(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt = \frac{1}{2}$$

$$a_k = \tfrac{2}{2} \int_0^1 t\cos(k\pi t)\,dt = \underbrace{\left[t \cdot \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} - \int_0^1 \tfrac{\sin(k\pi t)}{k\pi}\,dt = \left[\tfrac{\cos(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1} = \tfrac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2}$$

$$b_k = \tfrac{2}{2} \int_0^1 t\sin(k\pi t)\,dt = -\left[t \cdot \tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \tfrac{\cos(k\pi t)}{k\pi}\,dt = \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} + \underbrace{\left[\tfrac{\sin(k\pi t)}{(k\pi)^2}\right]_{t=0}^{t=1}}_{=0} = \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

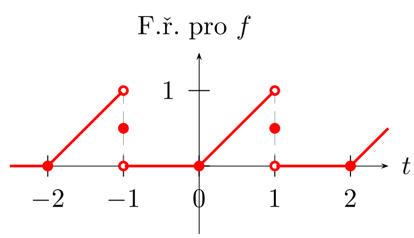
Takže

$$f \sim \tfrac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2} \cos(k\pi t) + \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi t)$$

a podle Jordanova kritéria je

$$\tfrac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{(-1)^k - 1}{(k\pi)^2} \cos(k\pi t) + \tfrac{(-1)^{k+1}}{k\pi} \sin(k\pi t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , t \in 2\mathbb{Z} + 1 \\ f(t) & , t \in \mathbb{R} \setminus (2\mathbb{Z} + 1) \end{cases} .$$

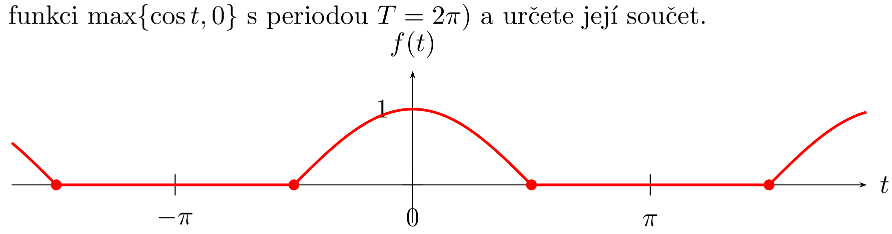
s grafem



14.10 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \begin{cases} \cos t & , \ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ 0 & , \ t \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}$$

(neboli funkci $\max\{\cos t, 0\}$ s periodou $T = 2\pi$) a určete její součet.



Řešení:

Perioda naší funkce je $T = 2\pi$, frekvence je $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1$ a $\frac{2}{T} = \frac{1}{\pi}$. Funkce f je sudá. Proto $b_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a dále ze sudosti f máme pro zbyle koeficienty Fourierovy řady funkce f, ze:

$$a_0 = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t\, dt = \frac{2}{\pi} \Big[\sin t \Big]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

$$a_k = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(kt)\, dt = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos t \cos(kt)\, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big(\cos(k+1)t + \cos(k-1)t \big)\, dt =$$

$$= \{\text{dále platí pro } k \geq 2\} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(k+1)t}{k+1} + \frac{\sin(k-1)t}{k-1} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} =$$

$$= \begin{cases} 0 & , k \text{ liché} \\ \frac{1}{\pi} \left(\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \right) = -\frac{2(-1)^n}{\pi(4n^2-1)} & , k = 2n, \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

protože

$$\sin\Big((2n+1) \tfrac{\pi}{2} \Big) = (-1)^n \text{ pro } n \in \mathbb{Z} \, .$$

Pro $k = 1$ máme

$$a_1 = \cdots = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} \big(\cos 2t + 1 \big)\, dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin 2t}{2} + t \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \frac{1}{2} \, .$$

Takže dostáváme

$$f \sim \tfrac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \big[a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt) \big] =$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2 - 1} \cos 2nt$$

($a_k = 0$ pro lichá k a pro sudá jsme to přepsali pomocí $k = 2n$)

Periodické rozšíření funkce f je všude spojité a podle Jordanova kritéria konverguje všude k původní funkci, tj.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\cos t + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} \cos 2nt$$

pro všechna $t \in \mathbb{R}$.

Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

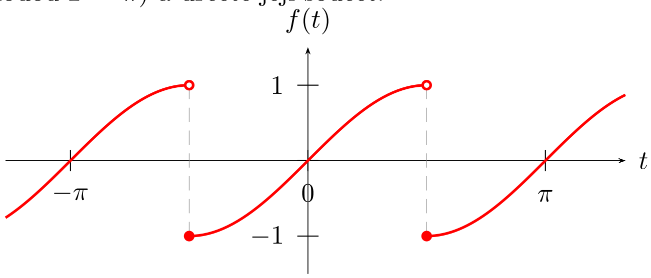
a tedy

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x+y) + \cos(x-y) \Big) \ .$$

14.11 Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce

$$f(t) = \sin t, \qquad t \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2})$$

(tj. s periodou $T = \pi$) a určete její součet.



Řešení:
Pro Fourierovu řadu funkce f máme: $T = \pi$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$ a $\frac{2}{T} = \frac{2}{\pi}$. Z lichosti f plyne, že všechny koeficienty a_k jsou nulové. Pro koeficienty b_k (opět z lichosti) máme

$$b_k = 2 \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cdot \sin(2kt)\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos(2k-1)t - \cos(2k+1)t \Big)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(2k-1)t}{2k-1} - \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1} \right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1} - \frac{(-1)^k}{2k+1} \right) = \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)}$$

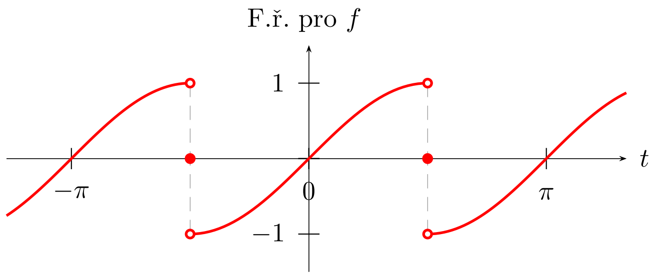
protože

$$\sin\left((2k+1)\tfrac{\pi}{2}\right) = (-1)^k \text{ pro } k \in \mathbb{Z} \ .$$

Dostáváme tak

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)} \sin 2kt,\ t \in \mathbb{R}.$$

Periodické rozšíření funkce f není spojité v bodech $t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. V těchto bodech konverguje Fourierova řada k hodnotě $\frac{1}{2}[f(t^-) + f(t^+)] = 0$. Ve všech ostatních bodech konverguje Fourierova řada k periodickému rozšíření funkce f a její graf je:



Poznámka: Použili jsme vzorce

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

a tedy

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2}\Big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\Big) \ .$$