2. cvičení z Matematické analýzy 2

27. února - 3. března 2023

2.1 Pro následující funkce f vždy načrtněte graf a popište vrstevnice:

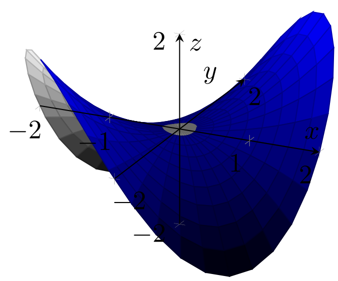
(a) $f(x,y) = xy$ (hyperbolický paraboloid),

(b) $f(x,y) = x^2 - y^2$ (hyperbolický paraboloid).

Řešení:
Zde se hodí všimnout si, že grafy funkcí v (a) a (b) jsou navzájem otočené o $\frac{\pi}{4}$ (a současně přenásobené hodnotou $\frac{1}{2}$). To zjistíme, když si zavedeme nové proměnné $x = \frac{\sqrt{2}}{2}(a-b)$ a $y = \frac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$ neboli použijeme ortogonální transformaci

$$\Phi : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{4}) & -\sin(\frac{\pi}{4}) \\ \cos(\frac{\pi}{4}) & \sin(\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Pak pro $f(x,y) = xy$ je $(f \circ \Phi)(a,b) = \frac{1}{2}(a-b)(a+b) = \frac{1}{2}(a^2-b^2)$. Stačí si tedy rozmyslet graf jen pro jeden z případů. Vrstevnice jsou opět zřejmě (soustředné) hyperboly a jejich asymptoty. A výsledný graf se nazývá hyperbolický paraboloid (nebo také sedlová plocha) a je to příklad plochy s tzv. zápornou křivostí (stejně jako předchozí jednodílný hyperboloid).



2.2 Určete definiční obor vektorového pole $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ a znázorněte $\vec{F}(x,y)$ v rovině.

Řešení:
$D(\vec{F}) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pro znázornění využijeme toho, že pro $\vec{u} = (x,y)^T$ a $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ je $\vec{F}(\vec{u}) = \frac{\mathbb{A}\vec{u}}{||\mathbb{A}\vec{u}||}$. Protože $\mathbb{A}$ představuje rotaci o 90 stupňů v záporném směru, tak $\vec{F}(\vec{u})$ představuje jednotkový vektor tečný ke kružnici se středem v počátku a procházející daným bodem (x,y). Tento vektor míří v záporném smyslu.

2.3 Určete definiční obor a obor hodnot funkce $f(x,y) = \frac{\sqrt{y^2-x}}{1-x}$.

Řešení:
$D = D(f): \ x \neq 1 \ \wedge \ x \leq y^2$. Ukážeme, že $H = f(D) = \mathbb{R}$.

Pro $y \geq 0$ je $(y, 0) \in D$ a funkce $f(y, 0) = \frac{\sqrt{y^2-0}}{1-0} = y$ má za obor hodnot množinu $[0, +\infty)$.

Na druhou stranu pro $y \geq \sqrt{2}$ je $(y, 2) \in D$ a funkce $f(y, 2) = \frac{\sqrt{y^2-2}}{1-2} = -\sqrt{y^2-2}$ má za obor hodnot množinu $(-\infty, 0]$.

2.4 Nalezněte definiční obor D, obor hodnot a hladiny výšky $c \in f(D)$ funkce

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 - 2x + 2y^2 + 4y + z^2 + 2}\ .$$

Řešení:
Nejdříve upravíme výraz doplněním na čtverec:

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 4y + z^2 + 2 = (x-1)^2 + 2(y+1)^2 + z^2 - 1$$

Definiční obor $D = D(f) : (x-1)^2 + 2(y+1)^2 + z^2 \geq 1$ je množina mimo daný elipsoid. Ukážeme, že $H = f(D) = [0, +\infty)$. Inkluze $H \subseteq [0, +\infty)$. Pro opačnou inkluzi si stačí uvědomit, že např. pro $z \geq 1$ je $(1, -1, z) \in D(f)$ a funkce $f(1, -1, z) = \sqrt{z^2 - 1}$ má za obor hodnot $[0, +\infty)$.

Pro $c \geq 0$ je $f(x, y, z) = c$ ekvivalentní $(x-1)^2 + 2(y+1)^2 + z^2 = c^2 + 1$, což je elipsoid.

..

Motivace:

Pojem *otevřené* množiny intuitivně zavádíme jako množinu, která s každým bodem obsahuje ještě dost prostoru kolem něj (je to kvůli pozdějšímu použití pro derivování - potřebujeme se k bodu přiblížit "odkudkoliv").

Pojmem *uzavřené* množiny zase intuitivně myslíme takovou množinu, ze které nemůžeme vypadnout při "limitách posloupností," tj. taková množina obsahuje všechny body, ke kterým se můžeme z této množiny přiblížit libovolně blízko.

Kupodivu, tyto dva pojmy jsou nakonec navzájem doplňkové (viz níže).

Definice:

Okolím $U_\varepsilon(a_0)$ (tzv. otevřenou koulí) s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$U_\varepsilon(a_0) \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{R}^n \mid ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

kde $||a - a_0||$ je *eukleidovská vzdálenost* bodů a a a_0, tj. pro

$$a_0 = (x_1, \ldots, x_n) \qquad \text{a} \qquad a = (y_1, \ldots, y_n)$$

je

$$||a - a_0|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\ .$$

Připomeňme si, že pro množinu $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si

- *vnitřek A°* množiny A definujeme jako množinu všech bodů $a \in A$, které jsou v A i s nějakým okolím:

$$a \in A^\circ \overset{\text{def}}{\iff} (\exists\, \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \subseteq A$$

- *hranice ∂A* množiny A je množina všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují jak do samotné množiny A, tak do jejího doplňku $\mathbb{R}^n \setminus A$:

$$a \in \partial A \overset{\text{def}}{\iff} \quad (\forall\ \varepsilon > 0) \quad U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset \quad \wedge \quad U_\varepsilon(a) \cap (\mathbb{R}^n \setminus A) \neq \emptyset$$

- *uzávěr $\overline{A}$* množiny A si definujeme jako množinu

$$\overline{A} \overset{\text{def}}{=} A \cup \partial A$$

  neboli (jak se dá snadno ověřit) jako množinu všech bodů $a \in \mathbb{R}^n$, jejichž libovolná okolí zasahují do množiny A:

$$a \in \overline{A} \iff (\forall\ \varepsilon > 0)\ \ U_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

- bod a je *hromadným bodem množiny A*, jestliže v každém svém okolí má nějaký bod této množiny, ale jiný než a, tj.:

$$(\forall\ \varepsilon > 0)\ \ P_\varepsilon(a) \cap A \neq \emptyset$$

  (hromadný bod je tedy určitě bodem uzávěru množiny A, ale není "osamocený").

- bod $a \in A$ je *izolovaným bodem množiny A*, jestliže není hromadný.

Kromě toho ještě platí, že

$$\partial A = \overline{A} \setminus A^\circ$$

a tedy

$$\overline{A} = A^\circ \ \uplus \ \partial A$$

kde "$\uplus$" znamená disjunktní sjednocení. Pro libovolnou množinu A se dále celý prostor $\mathbb{R}^n$ vždy disjunktně rozloží na vnitřek A°, hranici ∂A a *vnějšek* $(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ$:

$$\mathbb{R}^n = \underbrace{A^\circ}_{\text{vnitřek}} \ \uplus \ \underbrace{\partial A}_{\text{hranice}} \ \uplus \ \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus A)^\circ}_{\text{vnějšek}}$$

A nakonec si ještě (teď už skutečně) definujme, že

- množina A je *otevřená* $\overset{\text{def}}{\iff} A = A^\circ$ (tj. A je rovna svému vnitřku)

- množina A je *uzavřená* $\overset{\text{def}}{\iff} A = \overline{A}$ (tj. A je rovna svému uzávěru).

A platí, že

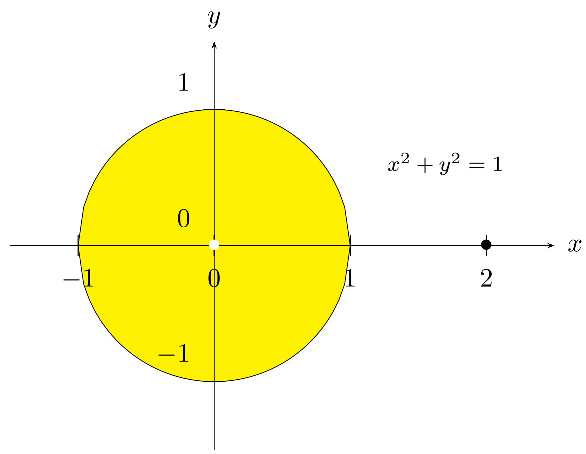
$$A \text{ je otevřená} \iff \mathbb{R}^n \setminus A \text{ je uzavřená}$$

(tj. otevřenost a uzavřenost jsou vzájemně doplňkové pojmy).

2.5 Určete vnitřek, hranici, uzávěr, hromadné body a izolované body množiny:

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(2, 0)\}\ .$$

Řešení:
Tento příklad je určený pro "intuitivní" řešení pomocí náčrtů daných množin.



- (***vnitřek***) $int(M)$: $\quad 0 < x^2 + y^2 < 1$
- (***hranice***) ∂M : $\quad (x, y) = (0, 0) \ \vee \ x^2 + y^2 = 1 \ \vee \ (x, y) = (2, 0)$
  (POZOR: je tu jiná logická spojka!)
- (***uzávěr***) $\overline{M} = \partial M \cup int(M) = M \cup \{(0, 0)\}$
- ***hromadné body***: $x^2 + y^2 \leq 1$
- ***izolované body***: $(x, y) = (2, 0)$

2.6 Určete vnitřek, hranici, vnějšek a uzávěr množiny $\mathbb{Q}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$, kde $\mathbb{Q}$ je množina všech racionálních čísel.

Řešení:
Uvědomíme si, že v libovolném okolí (na reálné přímce) libovolného $r \in \mathbb{R}$ leží jak nějaké racionální číslo, tak také nějaké iracionální číslo. Dále pokud máme $|r_i - s_i| < \frac{\varepsilon}{2}$ pro $i = 1, 2$ (kde $r_i, s_i \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$) pak

$$||(r_1, r_2) - (s_1, s_2)|| = \sqrt{(r_1 - s_2)^2 + (r_2 - s_2)^2} \leq \sqrt{\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon \ .$$

Jestliže si nyní vezmeme libovolný bod $a = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$ a zvolíme $\varepsilon > 0$, pak

- existují racionální čísla $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - q_i| < \frac{\varepsilon}{2}$
- a také iracionální čísla $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tak, že $|r_i - \alpha_i| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Speciálně tedy v libovolném ε-okolí $U_\varepsilon(a)$ bodu $a \in \mathbb{R}^2$ leží jak nějaký prvek z $(q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$, tak nějaký prvek $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Proto můžeme ihned napsat, že

$$\overline{\mathbb{Q}^2} = \mathbb{R}^2, \quad (\mathbb{Q}^2)^\circ = \emptyset \ \text{ a } \ \partial \mathbb{Q}^2 = \overline{\mathbb{Q}^2} \setminus (\mathbb{Q}^2)^\circ = \mathbb{R}^2 \setminus \emptyset = \mathbb{R}^2.$$

2.7 Najděte příklady neprázdných množin M v $\mathbb{R}^2$, že

(a) M nemá žádný vnitřní ani vnější bod (= vnitřní bod doplňku množiny M),

(b) M nemá žádný hraniční bod,

(c) M nemá žádný vnější bod a je uzavřená.

Řešení:

(a) Např. $M = \mathbb{Q}^2$ (jak je vidět z postupu v příkladu **2.4**, tak ani $\mathbb{Q}^2$ ani $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ nemají vnitřní body).

(b) Žádný hraniční bod nemá určitě celá rovina, tj. $M = \mathbb{R}^2$ (protože její doplněk je prázdný).

Dokonce je to jediná taková množina: Nechť M nemá hraniční bod, tj. $\partial M = \emptyset$. Pak

$$M \subseteq \overline{M} = M^\circ \cup \underbrace{\partial M}_{=\emptyset} = M^\circ \subseteq M$$

tedy dostáváme, že $M = \overline{M}$ a $M = M^\circ$. Množina M je tak současně otevřená a uzavřená. Dá se ukázat (s trochou práce), že jediná taková neprázdná množina v $\mathbb{R}^2$ je jen $M = \mathbb{R}^2$. Je to důsledek tzv. *souvislosti* prostoru $\mathbb{R}^2$.

(c) Opět můžeme zvolit $M = \mathbb{R}^2$.

Opět je to jediná takováto množina, což zjistíme takto: Použijeme rozklad $\mathbb{R}^2$ pomocí M, pro kterou předpokládáme $(\mathbb{R}^2 \setminus M)^\circ = \emptyset$ a $M = \overline{M}$:

$$\mathbb{R}^2 = \underbrace{M^\circ \ \dot\cup \ \partial M}_{=\overline{M}} \ \dot\cup \ \underbrace{(\mathbb{R}^n \setminus M)^\circ}_{=\emptyset} = \overline{M} = M$$

tedy $M = \mathbb{R}^2$.

2.8 Určete izolované a hromadné body množiny $M = \{\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in \mathbb{R}^2 \mid n, m \in \mathbb{N}\}$.

Řešení:

Nejdříve ukážeme, že všechny body množiny M jsou izolované:

Izolovaný bod $a \in M$ množiny M je takový, že

$$(\exists \varepsilon > 0) \ U_\varepsilon(a) \cap M = \{a\} \ .$$

Označme si pro jednoduchost $D = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. Takže máme, že $M = D \times D \subseteq \mathbb{R}^2$. Pro bod $\frac{1}{n} \in D$ je nejbližším bodem z D bod $\frac{1}{n+1}$.

Pro bod $a = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right) \in M$ si teď stačí zvolit $\varepsilon = \min\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\}$ a ihned máme, že $U_\varepsilon(a) \cap M = \{a\}$, tedy bod a je izolovaný bod množiny M.

Hromadný bod $a \in \mathbb{R}^2$ množiny M je takový, že

$$(\forall \varepsilon > 0) \ P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$

neboli v každém prstencovém okolí bodu a je nějaký bod množiny M.

Nejdříve ukážeme, že hromadné body jsou určitě body $(0,0)$ a body $(0, \frac{1}{n}), (\frac{1}{n}, 0)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Pro $\varepsilon > 0$ si stačí zvolit $k \in \mathbb{N}$ tak, že $\frac{1}{k} < \frac{\sqrt{2}}{k} < \varepsilon$. Pak je

$$||\left(0, \tfrac{1}{n}\right) - \left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{n}\right)|| = \sqrt{(0 - \tfrac{1}{k})^2 + (\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n})^2} = \tfrac{1}{k} < \varepsilon$$

$$||\left(\tfrac{1}{n}, 0\right) - \left(\tfrac{1}{n}, \tfrac{1}{k}\right)|| = \sqrt{(\tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n})^2 + (0 - \tfrac{1}{k})^2} = \tfrac{1}{k} < \varepsilon$$

$$||(0,0) - \left(\tfrac{1}{k}, \tfrac{1}{k}\right)|| = \sqrt{(0 - \tfrac{1}{k})^2 + (0 - \tfrac{1}{k})^2} = \tfrac{\sqrt{2}}{k} < \varepsilon$$

Takže uvedené body jsou skutečně hromadné.

A nakonec ukážeme, že jiné hromadné body už nejsou. Všechny dosud uvažované body (tj. izolované a nalezené hromadné) dohromady tvoří množinu $N = (\{0\} \cup D) \times (\{0\} \cup D)$. Všimněme si, že její doplněk do $\mathbb{R}^2$ tj. množina $\mathbb{R}^2 \setminus N$ se dá napsat jako sjednocení následujících otevřených intervalů

$$(-\infty, 0) \times \mathbb{R}, \qquad (1, +\infty) \times \mathbb{R} \quad \text{a} \quad (\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}) \times \mathbb{R}$$

$$\mathbb{R} \times (-\infty, 0), \qquad \mathbb{R} \times (1, +\infty) \quad \text{a} \quad \mathbb{R} \times (\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n})$$

pro $n \in \mathbb{N}$.

Tedy každý bod z $\mathbb{R}^2 \setminus N$ je v $\mathbb{R}^2 \setminus N$ i s nějakým svým okolím, protože všechny intervaly jsou otevřené. Takový bod tedy nemůže být hromadným bodem množiny M (protože $M \subseteq N$).

Připomenutí:

Jestliže chceme zjišťovat, jak se chová funkce v okolí nějakého bodu ve smyslu limity, pak se k tomuto bodu potřebujeme přiblížit pomocí bodu z definičního oboru dané funkce. Přitom však tyto body chceme mít jiné, než je samotný původní bod, ve kterém limitu zjišťujeme. To vede k následujícím pojmům:

- *Prstencovým okolím $P_\varepsilon(a_0)$* s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$P_\varepsilon(a_0) \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon(a_0) \setminus \{a_0\} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid 0 < ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

Limita funkce je nyní definována takto:

Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ je funkce s definičním oborem $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $a_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod tohoto definičního oboru D. Následující definice a značení znamená, že hodnota $c \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě a_0:

$$\lim_{a \to a_0} f(a) = c \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall a \in D) \quad \underbrace{0 < \|a - a_0\| < \delta}_{a \in P_\delta(a_0)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|f(a) - c| < \varepsilon}_{f(a) \in U_\varepsilon(c)}$$

(tj. když jsme v dostatečně malém prstencovém okolí $P_\delta(a_0)$ bodu a_0, pak se body odsud zobrazují funkcí f do zvoleného malého okolí $U_\varepsilon(c)$ hodnoty c.)

Připomenutí:

Jestliže chceme zjišťovat, jak se chová funkce v okolí nějakého bodu ve smyslu limity, pak se k tomuto bodu potřebujeme přiblížit pomocí bodu z definičního oboru dané funkce. Přitom však tyto body chceme mít jiné, než je samotný původní bod, ve kterém limitu zjišťujeme. To vede k následujícím pojmům:

- *Prstencovým okolím $P_\varepsilon(a_0)$* s poloměrem $\varepsilon > 0$ a středem v bodě $a_0 \in \mathbb{R}^n$ označujeme množinu

$$P_\varepsilon(a_0) \stackrel{\text{def}}{=} U_\varepsilon(a_0) \setminus \{a_0\} = \{a \in \mathbb{R}^n \mid 0 < ||a - a_0|| < \varepsilon\}$$

- bod a_0 je *hromadným bodem množiny M*, jestliže v každém svém okolí má nějaký bod této množiny, ale jiný než a_0, tj.:

$$(\forall\, \varepsilon > 0) \;\; P_\varepsilon(a) \cap M \neq \emptyset$$

  (hromadný bod je tedy určitě bodem uzávěru množiny M, ale není "osamocený").

Limita funkce je nyní definována takto:

Nechť $f : D \to \mathbb{R}$ je funkce s definičním oborem $D \subseteq \mathbb{R}^n$ a $a_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod tohoto definičního oboru D. Následující definice a značení znamená, že hodnota $c \in \mathbb{R}$ je limitou funkce f v bodě a_0:

$$\lim_{a \to a_0} f(a) = c \stackrel{\text{def}}{\iff} (\forall\, \varepsilon > 0)(\exists\, \delta > 0)(\forall a \in D) \quad \underbrace{0 < \|a - a_0\| < \delta}_{a \in P_\delta(a_0)} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{|f(a) - c| < \varepsilon}_{f(a) \in U_\varepsilon(c)}$$

(tj. když jsme v dostatečně malém prstencovém okolí $P_\delta(a_0)$ bodu a_0, pak se body odsud zobrazují funkcí f do zvoleného malého okolí $U_\varepsilon(c)$ hodnoty c.)

2.9 Zjistěte, zda existuje limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y}$.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$ je

$$D(f): \quad x \neq y \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Abychom zjistili, jakou hodnotu by případná limita měla mít, vyzkoušíme se přiblížit k počátku po různých přímkách, konkrétně po přímkách $y = kx$, kde $k \neq 1$. Pak máme

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x+kx}{x-kx} = \frac{1+k}{1-k} \ .$$

Tato hodnota je ale různá pro různé k. Původní limita funkce f tedy neexistuje.

2.10 Vyšetřete existenci limity $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$.

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2+y}{y^2+x}$ je

$$D(f): \quad x \neq -y^2 \ .$$

Bod $(0,0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0,0)$ po přímce $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ máme $(x,kx) \to (0,0)$. Takže nás zajímá

$$\lim_{x\to 0} f(x,kx) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+kx}{k^2x^2+x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+k}{k^2x+1} = k \ .$$

Z tohoto výsledku už vidíme, že limita závisí na přiblížení. Takže i toto nám ukazuje, že limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$ neexistuje.