3. cvičení z Matematické analýzy 2

6. - 10. března 2023

Užitečná poznámka: Platí: $\lim_{a\to a_0} f(a) = c \;\Leftrightarrow\; \lim_{a\to a_0} |f(a) - c| = 0$.
A dále

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x+x_0, y+y_0)$$

tedy limitu v libovolném bodě můžeme vždy převést na limitu v $(0,0)$ pro transformovanou funkci.

3.1 Zjistěte, zda existuje limita a pokud ano, určete její hodnotu:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+y^2} \;.$$

Řešení:
Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+2y^2}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Zkusíme si nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y=0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Kandidát na limitu je tedy $c = 0$. Protože v blízkosti nuly se $\sin y$ chová jako y, můžeme v čitateli předpokládat polynom stupně 4, zatímco ve jmenovateli je polynom stupně 2. Zdá se proto, že limita existovat bude. K důkazu použijeme odhad, jehož smyslem je v čitateli vytvořit výraz, který se zkrátí se jmenovatelem a i po zkrácení zbyde funkce, co má za limitu 0. Použijeme odhady

$$|\sin y| \leq |y| \quad \text{a} \quad |x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ potřebujeme odhadnout hodnotu $\big|f(x,y) - c\big|$, kde $c = 0$. Dostáváme, že

$$0 \leq \big|f(x,y) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{|x|^2 \cdot |\sin y|^2}{x^2+y^2} \leq \frac{|x|^2 \cdot |y|^2}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \;\leq\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x,y) - c\big| \;\leq\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 \;= 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = x^2+y^2$ je spojitá, protože je to polynom.
Nebo-li dokázali jsme, že $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

3.2 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^4+y^4}{(x-1)^2+y^2}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$.

Řešení:

(a) Podle poznámky výše můžeme převést limitu na limitu v počátku:

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^4+y^4}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$$

Definiční obor funkce $f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$ je

$$D(f): \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Budeme postupovat podobně jako v příkladu výše. Zkusíme si nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $y=0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x,0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Kandidát na limitu je tedy $c = 0$. V čitateli máme polynom stupně 4, zatímco ve jmenovateli je polynom stupně 2. Zdá se proto, že limita existovat bude. K důkazu použijeme odhad, jehož smyslem je v čitateli vytvořit výraz, který se zkrátí se jmenovatelem a i po zkrácení zbyde funkce, co má za limitu 0. Použijeme odhad

$$|x|, |y| \leq \sqrt{x^2+y^2}$$

Pro $(x,y) \neq (0,0)$ potřebujeme odhadnout hodnotu $\big|f(x,y) - c\big|$, kde $c = 0$. Dostáváme, že

$$0 \leq \big|f(x,y) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4 + \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}{x^2+y^2} = 2\frac{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}{x^2+y^2} = x^2+y^2$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 0 \;\leq\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} \big|f(x,y) - c\big| \;\leq\; \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 \;= 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x,y) = x^2+y^2$ je spojitá, protože je to polynom.

Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^4+y^4}{(x-1)^2+y^2} = c = 0$.

Ještě pomocí polárních souřadnic: Můžeme ještě použít odhad pomocí polárních souřadnic (který ale vlastně nepřináší v tomto případě nic nového): body (x,y) v okolí $a_0 = (0,0)$ vyjádříme jako

$$x = \varrho\cos\varphi \quad \text{a} \quad y = \varrho\sin\varphi$$

a dosadíme:

$$0 \leq \big|f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi) - \underbrace{c}_{=0}\big| = \frac{(\varrho\sin\varphi)^4 + (\varrho\cos\varphi)^4}{\varrho^2} = \varrho^2(\underbrace{\sin^4\varphi}_{\leq 1} + \underbrace{\cos^4\varphi}_{\leq 1}) \leq 2\varrho^2 =: g(\varrho)$$

Nyní, protože $\lim\limits_{\varrho\to 0_+} g(\varrho) = 0$ vyplývá z toho (viz Poznámky k limitám), že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = c = 0$.

Zde je podstatné, že funkce g už nezávisí na úhlu φ. Proč je takovýto odhad nezávislý na úhlu nutné dělat:
Vezmeme si např. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y}$

Při přiblížení po ose y (tj. $x = 0$) dostaneme jako limitu 0, při přiblížení po parabole $x = y^2$ dostaneme jako limitu hodnotu 1. Celková limita tedy neexistuje.

Při použití polárních souřadnic a limitě $\varrho \to 0$ při pevné hodnotě φ máme $\lim_{\varrho \to 0} \frac{\varrho^2 \cos^2 \varphi}{\varrho \sin \varphi} = \lim_{\varrho \to 0} \varrho \frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi} = 0$. Tyto limity ale odpovídají jen přiblížení po polopřímkách. Přestože všechny vycházejí stejně, limita neexistuje (jak už víme výše). Kromě toho funkce $\frac{\cos^2 \varphi}{\sin \varphi}$ není omezená na množině $(0, \pi) \cup (\pi, 2\pi)$.

(b) Definiční obor funkce $f(x, y) = \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$ je tentokrát

$$D(f): \quad x \neq -y \; .$$

Bod $(0, 0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Situace je zde jiná než v předchozím příkladu právě kvůli větší množině, kterou vynecháváme z definičního oboru. Z tvaru funkce f už snadno vidíme, že na přímce $x = -y$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0, 0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x, y) = \frac{h(x,y)}{g(x,y)}$, kde $h(x, y) = x^4 + y^4$ a $g(x, y) = x^3 + y^4$ jsou spojité funkce
- položme $M: \; x = -y \; \wedge \; (x, y) \neq (0, 0)$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0, 0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0, 0)$ po přímce $y = kx$, kde $-1 \neq k \in \mathbb{R}$. Pro $x \to 0$ máme $(x, kx) \to (0, 0)$. Takže nás zajímá

$$\lim_{x\to 0} f(x, kx) = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + k^4)x^4}{(1 + k^3)x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(1 + k^4)}{(1 + k^3)} x = 0 \; .$$

Proto ani "nekonečná" limita neexistuje.

3.3 Zjistěte, zda existují následující limity a pokud ano, určete jejich hodnotu:

(a) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}$,

(b) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz^2}{x+y+z}$.

Řešení:

(a) Definiční obor funkce $f(x, y, z) = \frac{xyz^2}{x^2+y^2+z^2}$ je

$$D(f): \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0).$$

Tedy jmenovatel ve zlomku se vynuluje jen v jediném bodě. Budeme postupovat podobně jako v příkladu výše. Zkusíme si nějaké přiblížení, např. po ose x (tj. při $z = y = 0$):

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0, 0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Kandidát na limitu je tedy $c = 0$. V čitateli máme polynom stupně 4, zatímco ve jmenovateli je polynom stupně 2. Zdá se proto, že limita existovat bude. K důkazu použijeme odhad, jehož smyslem je v čitateli vytvořit výraz, který se zkrátí se jmenovatelem a i po zkrácení zbyde funkce, co má za limitu 0. Použijeme odhad

$$|x|, |y|, |z| \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pro $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ potřebujeme odhadnout hodnotu $\left|f(x, y, z) - c\right|$, kde $c = 0$. Dostáváme, že

$$0 \leq \left|f(x, y, z) - \underbrace{c}_{=0}\right| = \frac{|x| \cdot |y| \cdot |z|^2}{x^2 + y^2 + z^2} \leq \frac{\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^4}{x^2 + y^2 + y^2} = x^2 + y^2 + z^2$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0 = \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} 0 \;\leq \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \left|f(x, y, z) - c\right| \;\leq \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} x^2 + y^2 + z^2 \; = 0$$

kde jsme použili to, že funkce $g(x, y) = x^2 + y^2 + z^2$ je spojitá, protože je to polynom.
Nebo-li dokázali jsme, že $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z) = c = 0$.

- -

(b) Definiční obor funkce $f(x, y, z) = \frac{xyz^2}{x+y+z}$ je tentokrát

$$D(f): \quad x + y + z \neq 0 \; .$$

Bod $(0, 0, 0)$ je zřejmě hromadný bod množiny $D(f)$. Situace je zde jiná než v předchozím příkladu právě kvůli větší množině, kterou vynecháváme z definičního oboru. Z tvaru funkce f už snadno vidíme, že např. na přímce $x = y = -\frac{z}{2}$ se jmenovatel zlomku vynuluje a čitatel ne (až na bod $(0, 0, 0)$). Takže můžeme použít jednoduché kritérium pro neexistenci (konečné) limity (viz Poznámky k limitám):

- $f(x, y, z) = \frac{h(x,y,z)}{g(x,y,z)}$, kde $h(x, y, z) = xyz^2$ a $g(x, y, z) = x + y + z$ jsou spojité funkce
- položme $M = \{(t, t, -2t) \mid t \in \mathbb{R},\ t \neq 0\}$
- pro každé $a \in M$ je $g(a) = 0$ a $h(a) \neq 0$
- $a_0 = (0, 0, 0)$ je hromadný bod množiny M

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} f(x, y, z)$.

Pro pořádek si ještě spočítejme alespoň jedno přiblížení, abychom věděli, že ani případná "nekonečná" limita nemůže existovat:

Vyzkoušíme se přiblížit k bodu $a_0 = (0, 0, 0)$ po ose x. Takže nás zajímá

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0, 0) = \lim_{x\to 0} 0 = 0 \; .$$

Proto ani "nekonečná" limita neexistuje.

3.4 Rozhodněte, zda funkce je spojitá:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2} & , \; x^2 \neq y^2, \\ 0 & , \; x^2 = y^2. \end{cases}$$

Řešení:
Případ $x^2 = y^2$ představuje dvě přímky $x = \pm y$. Pro $M: \quad x \neq \pm y$ si upravíme výraz

$$\frac{x^2y + xy^2}{x^2 - y^2} = \frac{xy(x+y)}{(x-y)(x+y)} = \frac{xy}{x-y}$$

Funkci si teď přepíšeme:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x-y} & , \ x \neq \pm y, \\ 0 & , \ x = \pm y. \end{cases}$$

V bodech $(a, -a)$, $a \neq 0$ máme ze spojitosti funkce $\frac{xy}{x-y}$, že

$$\lim_{(x,y)\to(a,-a)} \frac{xy}{x-y} = -\frac{a}{2} \neq 0 = f(a,-a)$$

a tedy funkce $f(x,y)$ není spojitá v bodech $(a,-a)$, kde $a \neq 0$, tedy f není spojitá.

3.5 Určete funkci g tak, aby funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{y} & , \ y \neq 0, \\ g(x) & , \ y = 0. \end{cases}$ byla spojitá.

Řešení:
Protože víme, že $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$, zkusíme toto využít pro úpravu funkce f a to jako

$$f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot x$$

pro body $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ takové, že $y \neq 0$.
Nyní můžeme udělat následující:

- funkce
$$h(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$
je spojitá v celém $\mathbb{R}$.
- funkce $\varphi(x,y) = xy$ je spojitá v celém $\mathbb{R}^2$ (je to polynom) a tedy složená funkce
$$F(x,y) = h(\varphi(x,y)) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{xy}, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$$
je spojitá v celém $\mathbb{R}^2$
- platí $f(x,y) = F(x,y) \cdot y$ pro všechna $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $y \neq 0$:
$$F(x,y) \cdot x = \frac{\sin xy}{xy} \cdot x = \frac{\sin xy}{y} = f(x,y)$$

Tedy spojitá funkce

$$F(x,y) \cdot x = \begin{cases} \frac{\sin xy}{y}, & y \neq 0 \\ x, & y = 0 \end{cases}$$

je spojitým rozšířením funkce $f(x,y)$ na celém $\mathbb{R}^2$. Stačí tedy položit $g(x) = x$.

Toto rozšíření je jednoznačné, protože je určeno hodnotami limit funkce $\frac{\sin xy}{y}$ v bodech na ose x (ty existují, protože jsou stejné jako limity funkce $F(x,y) \cdot x$, o které už víme, že je spojitá.)

Připomenutí:

Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ a nechť a_0 je vnitřní bod jejího definičního oboru. *Derivace ve směru* $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ funkce f v bodě a_0 je definována jako následující (konečná) hodnota

$$\nabla_{\vec{h}} f(a_0) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(a_0 + t\vec{h})|_{t=0} = \lim_{t\to 0} \frac{f(a_0 + t\vec{h}) - f(a_0)}{t}$$

Neboli: Definiční obor $D(f)$ "projíždíme" po přímce $\varphi(t) = a_0 + t\vec{h}$, kde t představuje čas a $\vec{h}$ tím pádem vektor rychlosti pohybu po dané přímce. A ptáme se, jak se rychle se přitom budou měnit hodnoty funkce f při průchodu bodem a_0. Je zřejmé, že čím větší bude rychlost průchodu $\vec{h}$, tím rychlejší budou i změny hodnot funkce f.

Speciálně definujeme tzv. *parciální derivaci podle i-té proměnné* (dejme tomu, že se bude jmenovat x_i) jako

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a_0) := \nabla_{\vec{e}_i} f(a_0)$$

kde $\vec{e}_i = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{tá pozice}}, 0, \ldots, 0)$ je vektor standardní báze.

Konkrétně pro funkci $f : D \to \mathbb{R}$, kde $D \subseteq \mathbb{R}^2$ a vnitřní bod $a_0 = (x_0, y_0)$ definičního oboru $D(f) = D$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y_0)_{|x=x_0}$$

tedy funkci f stačí "obyčejně" derivovat podle proměnné x, kde druhou proměnnou y bereme na chvíli jako konstantu.

3.6 Nalezněte směrovou derivaci funkce $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ v bodě $(0, 0)$ ve všech směrech, ve kterých existuje.

Řešení:

Vzhledem k tomu, ze odmocnina nemá konečnou derivaci v nule a absolutní hodnota nemá derivaci v nule dokonce vůbec, musíme použít definici směrové derivace. Pro $\vec{v} = (a, b)$ máme

$$\nabla_{\vec{v}} f(0, 0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0 + ta, 0 + tb) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|t|\sqrt{|ab|}}{t} \begin{cases} = 0, & ab = 0 \\ \text{neex.}, & ab \neq 0 \end{cases}.$$

Derivace tedy existuje jen pro vektory, které jsou násobky buď $\vec{e}_1 = (1, 0)$ nebo $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

3.7 Je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nalezněte $\nabla_{\vec{v}} f(0, 0)$ ve všech směrech, ve kterých existuje. Je zobrazení $\vec{v} \mapsto \nabla_{\vec{v}} f(0, 0)$ lineární? Je funkce f spojitá?

Řešení:

Bod $a=(0,0)$ nemá v žádném svém okolí jednotný předpis funkce f. Musíme proto použít explicitní definici definici směrové derivace. Pro $\vec{v}=(a,b)$ máme definici směrové derivace. Pro $\vec{v}=(a,b)\neq\vec{0}$ máme

$$\nabla_{\vec{v}}f(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+ta,0+tb)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\cdot\frac{t^5a^2b^3}{t^4a^4+t^4b^4}=\frac{a^2b^3}{a^4+b^4}\ .$$

Máme tedy zobrazení $L(a,b)=\frac{a^2b^3}{a^4+b^4}$ a $L(0,0)=0$. Protoze např. pro $a\neq 0$ a $b\neq 0$ je

$$L(a,0)+L(0,b)=0+0\neq\frac{a^2b^3}{a^4+b^4}=L(a+0,0+b)$$

tak zobrazení $L:\ \vec{v}\mapsto\nabla_{\vec{v}}f(0,0)$ není lineární.

Funkce f je zřejmě spojitá v bodech $(x,y)\neq(0,0)$ (z věty o spojitosti podílu funkcí). V bodě $(0,0)$ ukážeme spojitost odhadem

$$|x|,|y|\leq\sqrt[4]{x^4+y^4}$$

Pro $(x,y)\neq(0,0)$ máme

$$0\leq\left|f(x,y)-f(0,0)\right|=\frac{|x|^2|y|^3}{x^4+y^4}\leq\frac{\left(\sqrt[4]{x^4+y^4}\right)^5}{x^4+y^4}=\sqrt[4]{x^4+y^4}$$

Z věty o limitě sevřené funkce pak máme, že

$$0=\lim_{(x,y)\to(0,0)}0\ \leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|f(x,y)-f(0,0)\right|\ \leq\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt[4]{x^4+y^4}\ =0$$

tedy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)$ a funkce f je všude spojitá.

3.8 Vypočtěte všechny parciálně derivace (1. řádu) funkce f a určete všechny body, ve kterých jsou spojité, jestliže

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Řešení:

V bodech $a=(x,y)\neq(0,0)$ je předpis funkce f v nějakém okolí $U_\varepsilon(a)$ ve tvaru $f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}$. Můžeme tak standardně použít postupy o derivování funkcí:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{xy}{x^2+y^2}\right)(a)=\frac{y(x^2+y^2)-2x^2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

a ze symetrie podobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a)=\frac{x(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\ .$$

Pro bod $a=(0,0)$, který nemá v žádném svém okolí jednotný předpis funkce f, musíme použít (explicitní) definici:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}0=0$$

a podobně

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} 0 = 0 \ .$$

Celkem jsme tedy dostali, že

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}, & \text{pro } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{pro } (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

a symetricky pro $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ je zřejmě spojitá v bodech $(x,y) \neq (0,0)$.

Podíváme se, jestli je tato funkce spojitá v bodě $(0,0)$. Když si vezmeme např. přiblížení po ose y (tj. $x=0$) dostaneme, že limita

$$\lim_{y\to 0} \frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{y^3}{y^4} = \lim_{y\to 0} \frac{1}{y}$$

neexistuje. Tedy funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ není spojitá v bodě $(0,0)$. A stejně je to s funkcí $\frac{\partial f}{\partial y}$.

3.9 Určete parciální derivace (1. řádu) funkce

(a) $f(x,y) = x \sin\left(\frac{x}{y}\right)$.

(b) $f(x,y) = x \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{1+x}\right)$

Řešení:

(a) Definiční obor $D(f):\ y \neq 0$ je otevřená množina. V každém bodě $(x,y) \in D(f)$ máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right) = \sin\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x \sin\left(\frac{x}{y}\right)\right) = -\frac{x}{y^2}\cos\left(\frac{x}{y}\right)$$

(b) Definiční obor $D(f):\ x \neq -1$ je otevřená množina. V každém bodě $(x,y) \in D(f)$ máme:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{1+x}\right)\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{1+x}\right) - \frac{xy}{(1+x)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{1+x}\right)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{1+x}\right) - \frac{xy}{(1+x)^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{1+x}\right)\right) = \frac{x}{1+x} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{y}{1+x}\right)^2} = \frac{x(1+x)}{(1+x)^2+y^2}$$