# 4. cvičení z Matematické analýzy 2

13. - 17. března 2023

**Připomenutí:** *Derivace (totální diferenciál)* funkce $f$ z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ ve vnitřním bodě $a_0 \in D(f)$ definičního oboru $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ je takové lineární zobrazení (označené jako $df(a_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$), které je nejlepší aproximací funkce $f$ v bodě $a_0$ v tomto smyslu:

Rozdíl hodnot funkcí $f(a)$ a

$$g(a) := f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

klesá v okolí bodu $a_0$ rychleji než $\|a - a_0\|$, tj.

$$\lim_{a \to a_0} \tfrac{f(a)-g(a)}{\|a-a_0\|} = \lim_{a \to a_0} \tfrac{f(a)-f(a_0)-df(a_0)[a-a_0]}{\|a-a_0\|} = 0 \ .$$

**Poznámka:**

- Pokud existuje derivace $df(a_0)$, pak také existují derivace $\nabla_{\vec{u}} f(a_0)$ podle vektoru pro každý vektor $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ a platí, že

  $$\nabla_{\vec{u}} f(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] \ .$$

  Speciálně, existují pak všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0)$ a matice zobrazeni $df(a_0)$ ve standardní bázi má tvar

  $$\left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_0) \ , \ldots , \ \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_0) \right) \ .$$

  (Pro jednoduchost zápisu, budeme ztotožňovat zobrazení a jeho matici ve standardní bázi.)

  **POZOR:** Pouhá existence parciálních derivací ještě nezaručuje existenci (úplné) derivace! Ta je mnohem komplikovanější objekt. Máme ale tuto postačující podmínku:

- Nechť všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existují a *jsou spojité* na otevřené množině $G \subseteq \mathbb{R}^n$. Pak derivace $df(a)$ existuje v každém bodě $a \in G$.

**Definice:** Nechť existuje $df(a_0)$. *Gradient funkce* $f$ v bode $a_0$ je takový vektor $\nabla f(a_0) \in \mathbb{R}^n$, že pro každé $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je

$$df(a_0)[\vec{h}] = \nabla f(a_0) \cdot \vec{h}$$

(kde $\cdot$ je standardní skalární součin). Tedy ve standardní bázi máme

$$\nabla f(a_0) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \ .$$

**4.1** Mějme funkci $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ a bod $a_0 = (2, 2)$.

(a) Určete derivaci a tečnou rovinu $f$ v $a_0$.

(b) Určete jednotkové vektory $\vec{h}$ tak, aby (i) $\nabla_{\vec{h}} f(a_0) = -1$, (ii) $\nabla_{\vec{h}} f(a_0)$ byla největší, (iii) $\nabla_{\vec{h}} f(a_0) = 0$.

(c) Ve kterém ze směrů $\vec{u}_1 = (0, 1)$ a $\vec{u}_2 = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ má funkce $f$ v bodě $a_0$ větší růst?

**Řešení:**

(a) Parciální derivace jsou

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + \cos(x-y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = y - \cos(x-y)\ .$$

Z jejich spojitosti v okolí bodu $a_0 = (x_0, y_0) = (2,2)$ (spojité jsou dokonce všude na $\mathbb{R}^2$) vidíme, že derivace $df(a_0)$ skutečně existuje. Máme tedy

$$\Big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\Big) = \Big(y + \cos(x-y),\ x - \cos(x-y)\Big)(a_0) = (3,1)$$

a tudíž

$$df(a_0)[\vec{h}] = \Big(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\Big)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3,1)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 3h_1 + h_2\ .$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0)\cdot(x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\cdot(y-y_0) =$$
$$= 4 + 3(x-2) + y - 2$$

neboli

$$3x + y - z = 4$$

(b) Pro $\vec{h} = (h_1, h_2)$ takové, že $1 = \|\vec{h}\|^2 = h_1^2 + h_2^2$ chceme, aby platilo, že

(i) $-1 = \nabla_{\vec{h}} f(a_0) = df(a_0)[\vec{h}] = 3h_1 + h_2$. Dosazením $h_2 = -1 - 3h_1$ máme $1 = h_1^2 + (3h_1+1)^2$ tedy $10h_1^2 + 6h_1 = 0$. Výsledek je $\vec{h} = (0,-1)$ a $\vec{h} = (-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$.

(ii) $\nabla_{\vec{h}} f(a_0)$ je největší pro jednotkový vektor ve směru gradientu, tedy $\vec{h} = \frac{\nabla f(a_0)}{\|\nabla f(a_0)\|} = (\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}})$.

(iii) $\nabla_{\vec{h}} f(a_0) = 0$ právě když $\vec{h}$ je kolmý na gradient, tedy $\vec{h} = (\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}})$ nebo $\vec{h} = (-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$.

(c) Oba vektory $\vec{u}_1$ a $\vec{u}_2$ jsou skutečně směry (tj. $\|\vec{u}_1\| = 1 = \|\vec{u}_2\|$), takže z hlediska růstu funkce stačí spočítat derivace v těchto směrech (kdyby vektory měly obecně různou délku, pak bychom je měli nejdříve znormovat a pak teprve počítat derivaci ve směru). Máme

$$\nabla_{\vec{u}_1} f(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_1] = (3,\ 1)\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

a

$$\nabla_{\vec{u}_2} f(a_0) = df(a_0)[\vec{u}_2] = (3,\ 1)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2}$$

takže větší růst je v $\vec{u}_2$.

**4.2** Mějme funkci $f(x,y) = \ln(xy^2)$ a bod $a_0 = (1,1)$.

(a) Určete totální diferenciál a tečnou rovinu funkce $f$ bodě $a_0$.

(b) Určete $\nabla_{\vec{u}} f(a_0)$ pro $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

(c) Určete vektory $\vec{U}_1 = (0, 1, ?)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, ?)$ tak, aby ležely ve vektorovém prostoru odpovídajícímu tečné rovině. Který z vektoru má větší strmost (tj. úhel svírající s vodorovným směrem)?

**Řešení:**

(a) Pro $a_0 = (1, 1)$ máme

$$\nabla f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{y^2}{xy^2}, \frac{2xy}{xy^2}\right)(a_0) = (1, 2)\ .$$

Existence grad$f(a_0)$ plyne ze spojitosti parciálních derivací v obecném bodě.

Tečná rovina funkce $f$ v daném bodě $a_0 = (x_0, y_0)$ má rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0]$$

neboli

$$z = f(a_0) + \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0), \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right)\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix} = 0 + (1,\ 2)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = x - 1 + 2(y-1)$$

což se dá přepsat také jako

$$x + 2y - z = 3\ .$$

(b) Derivace ve směru $\vec{u}$ je

$$\nabla_{\vec{u}} f(a_0) = df(a_0)[\vec{u}] = (1,\ 2) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = -\tfrac{\sqrt{2}}{2}.$$

(c) Vektor leží v tečné rovině právě když je kolmý na normálový vektor této roviny, který je $(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1) = (1, 2, -1)$. Tedy pro $\vec{U}_1 = (0, 1, c)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, d)$ máme

$$0 = \nabla f(a_0) \cdot \vec{U}_1 = 2 - c$$

$$0 = \nabla f(a_0) \cdot \vec{U}_2 = 4 - d$$

tedy $\vec{U}_1 = (0, 1, 2)$ a $\vec{U}_2 = (2, 1, 4)$.

Strmost vektoru je dána jejich úhly $\varphi_1$ a $\varphi_2$, které svírají se základnou

$$\mathrm{tg}(\varphi_1) = \frac{2}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = 2$$

$$\mathrm{tg}(\varphi_2) = \frac{4}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}\ (< 2)$$

takže větší strmost v tečné rovině má vektor v $\vec{U}_1$.

**4.3** Mějme funkci $f(x, y) = \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ a bod $a_0 = (1, 1)$.

(a) Určete derivaci a tečnou rovinu $f$ v bodě $a_0$.

(b) Určete jednotkové vektory $\vec{h}$ tak, aby (i) $\nabla_{\vec{h}} f(a_0) = \frac{1}{4}$, (ii) $\nabla_{\vec{h}} f(a_0)$ byla největší, (iii) $\nabla_{\vec{h}} f(a_0) = 0$.

(c) Určete vektory $\vec{U}_1 = (0, 1, ?)$ a $\vec{U}_2 = (-1, -2, ?)$ tak, aby ležely ve vektorovém prostoru odpovídajícímu tečné rovině. Který z vektorů má větší strmost (tj. úhel svírající s vodorovným směrem)?

**Řešení:**

Definiční obor je $D(f) : y \neq 0$, což je otevřená množina a protože zde všechny parciálních derivace existují a jsou spojité (jak se ihned přesvědčíme), tak derivace v bodě $a_0$ skutečně existuje.

(a) Pro $a_0 = (1, 1)$ je

$$\nabla f(a_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0)\right) = \left(\frac{1}{y(1 + (\frac{x}{y})^2)}, -\frac{x}{y^2(1 + (\frac{x}{y})^2)}\right)(a_0) = \left(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right) .$$

Tečná rovina má rovnici:

$$z = f(a_0) + df(a_0)[a - a_0] = f(a_0) + \tfrac{\partial f}{\partial x}(a_0) \cdot (x - x_0) + \tfrac{\partial f}{\partial y}(a_0) \cdot (y - y_0) =$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(x - 1) - \frac{1}{2}(y - 1)$$

neboli

$$x - y - 2z = -\frac{\pi}{2} .$$

(b) Pro $\vec{h} = (h_1, h_2)$ takové, že $1 = \|\vec{h}\|^2 = h_1^2 + h_2^2$ chceme, aby platilo, že

(i) $\frac{1}{4} = \nabla_{\vec{h}} f(a_0) = df(a_0)[\vec{h}] = \frac{1}{2}(h_1 + h_2)$. Dosazením $h_2 = \frac{1}{2} - h_1$ máme $1 = h_1^2 + (\frac{1}{2} - h_1)^2$ tedy $2h_1^2 - h_1 - \frac{3}{4} = 0$. Výsledek je $\vec{h} = \left(\frac{1+\sqrt{7}}{4}, \frac{1-\sqrt{7}}{4}\right)$ a $\vec{h} = \left(\frac{1-\sqrt{7}}{4}, \frac{1+\sqrt{7}}{4}\right)$.

(ii) $\nabla_{\vec{h}} f(a_0)$ je největší pro jednotkový vektor ve směru gradientu, tedy $\vec{h} = \frac{\nabla f(a_0)}{\|\nabla f(a_0)\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(iii) $\nabla_{\vec{h}} f(a_0) = 0$ právě když $\vec{h}$ je kolmý na gradient, tedy $\vec{h} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ nebo $\vec{h} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

(c) Vektor leží v tečné rovině právě když je kolmý na normálový vektor této roviny, který je $(\frac{\partial f}{\partial x}(a_0), \frac{\partial f}{\partial y}(a_0), -1) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1\right)$. Tedy pro $\vec{U}_1 = (0, 1, c)$ a $\vec{U}_2 = (-1, -2, d)$ máme

$$0 = \nabla f(a_0) \cdot \vec{U}_1 = -\frac{1}{2} - c$$

$$0 = \nabla f(a_0) \cdot \vec{U}_2 = \frac{1}{2} - d$$

tedy $\vec{U}_1 = \left(0, 1, -\frac{1}{2}\right)$ a $\vec{U}_2 = \left(-1, -2, \frac{1}{2}\right)$.

Strmost vektoru je dána jejich úhly $\varphi_1$ a $\varphi_2$, které svírají se základnou

$$\operatorname{tg}(\varphi_1) = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{0^2 + 1^2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}(\varphi_2) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{2\sqrt{5}} > -\frac{1}{2}$$

takže větší strmost v tečné rovině má vektor v $\vec{U}_2$.

**4.4** Určete Jacobiho matici vektorové funkce $f(x,y) = (x+y, x^2y)$ v obecném bodě $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ a určete, v kterých bodech má tato matice nulový determinant.

**Řešení:**

$$J_\Phi(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x+y)}{\partial x} & \frac{\partial(x+y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x^2y)}{\partial x} & \frac{\partial(x^2y)}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}.$$

$$\det J_\Phi(a) = x^2 - 2xy = x(x-2y) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \,\vee\, x = 2y.$$

**4.5** Nalezněte Jacobiho matici a diferenciál vektorové funkce $\Phi(x,y) = (ye^x, x^3-y, 2x+1)$ v bodě $a = (0,1)$.

**Řešení:**

$$J_\Phi(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(ye^x)}{\partial x} & \frac{\partial(ye^x)}{\partial y} \\ \frac{\partial(x^3-y)}{\partial x} & \frac{\partial(x^3-y)}{\partial y} \\ \frac{\partial(2x+1)}{\partial x} & \frac{\partial(2x+1)}{\partial y} \end{pmatrix}_{|a} = \begin{pmatrix} ye^x & y \\ 3x^2 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}_{|a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$d\Phi(a)[\vec{h}] = J_\Phi(a)\vec{h} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 + h_2 \\ -h_2 \\ 2h_1 \end{pmatrix}$$

**4.6** Nechť $f = f(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Najděte (obecně) derivaci funkce $g(x,y,z) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{z})$.

**Řešení:**
Definiční obor funkce $g$ je $D(g) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0, z \neq 0\}$. Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(f(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z})\Big) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{y}{z})}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z})$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(f(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z})\Big) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{y}{z})}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z})$$

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(f(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z})\Big) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{x}{y})}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}) \cdot \frac{\partial(\frac{y}{z})}{\partial z} = -\frac{y}{z^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{x}{y}, \tfrac{y}{z}).$$

**4.7** Pomocí diferenciálu nalezněte přibližně hodnotu $1,02^{3,01}$.

**Řešení:**
Budeme uvažovat funkci

$$f(x,y) = x^y = e^{y \ln x}$$

(pro jednoduchost s definičním oborem $x, y > 0$) a najdeme její linearizaci $g$ v bodě $a_0 = (1,3)$. Hodnotu v bodě $a_1 = (1.02, 3.01)$ pak vyjádříme přibližně jako

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + df(a_0)[\vec{h}]$$

kde $\vec{h} = a_1 - a_0 = (0.02, 0.01)$.

Máme tedy

$$J_f(a_0) = \left(\frac{y}{x} e^{y \ln x},\ \ln x \cdot e^{y \ln x}\right)(a_0) = (3,0)$$

takže

$$f(a_1) \doteq g(a_1) = f(a_0) + df(a_0)[\vec{h}] = 1 + (3,0)\begin{pmatrix} 0.02 \\ 0.01 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 0.06 = 1.06\ .$$