5. cvičení z Matematické analýzy 2

20. - 24. března 2023

5.1 Je dána diferencovatelná funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $h(u,v) = f(g(u,v))$. Vypočtěte

(i) $\frac{\partial h}{\partial u}(0,0)$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(0,0)$, víte-li, že $g(u,v) = (e^u + \sin v, e^u + \cos v)$ a $\nabla f(1,2) = (2,-3)$.

(ii) $\frac{\partial h}{\partial u}(1,-1)$ a $\frac{\partial h}{\partial v}(1,-1)$, víte-li, že $g(u,v) = (u^2 + 2uv^2 - v^3, v^2 - 3u)$ a $\nabla f(4,-2) = (2,1)$.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)$, víte-li, že $g(u,v) = (u + u\ln v, \frac{u+v}{u-1})$ a $\nabla h(2,1) = (3,1)$.

Řešení:
Z $h(a) = f(g(a))$ pro $a = (u,v)$ dostaneme pomocí věty s derivaci složené funkce, že

$$J_h(a) = J_f(g(a)) \cdot J_g(a) \ .$$

Přitom můžeme ztotožnit Jacobiho matici dané funkce a její gradient.

(i) $a = (0,0)$, $g(a) = (1,2)$ a

$$J_g(a) = \begin{pmatrix} e^u & \cos v \\ e^u & -\sin v \end{pmatrix}_{|a} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tedy

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}\right)_{|a} = J_f(g(a)) \cdot J_g(a) = (2,-3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = (-1,2) \ .$$

(ii) $a = (1,-1)$, $g(a) = (4,-2)$ a

$$J_g(a) = \begin{pmatrix} 2u + 2v^2 & 4uv - 3v^2 \\ -3 & 2v \end{pmatrix}_{|a} = \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

Tedy

$$\left(\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{\partial h}{\partial v}\right)_{|a} = J_f(g(a)) \cdot J_g(a) = (2,1) \cdot \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = (5,-16) \ .$$

(iii) $a = (2,1)$, $g(a) = (2,3)$ a

$$J_g(a) = \begin{pmatrix} 1 + \ln v & \frac{u}{v} \\ -\frac{v+1}{(u-1)^2} & \frac{1}{u-1} \end{pmatrix}_{|a} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tedy

$$(3,1) = J_h(a) = J_f(g(a)) \cdot J_g(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{|g(a)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

takže

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)_{|g(a)} = (3,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = (3,1) \cdot \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = (1,-1) \ .$$

5.2 Nechť $f = f(u,v) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je spojitě diferencovatelná funkce. Najděte (obecně) derivaci funkce $g(s,t) = f(\frac{s}{t}, t-s)$.

Řešení:
Definiční obor funkce g je $D(g) = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 \mid t \neq 0\}$. Podle řetězového pravidla dostáváme

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\Big(f(\tfrac{s}{t}, t-s)\Big) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t}, t-s) \cdot \frac{\partial(\frac{s}{t})}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t}, t-s) \cdot \frac{\partial(t-s)}{\partial s} = \frac{1}{t} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t}, t-s) - \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t}, t-s)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(f(\tfrac{s}{t}, t-s)\Big) = \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t}, t-s) \cdot \frac{\partial(\frac{s}{t})}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t}, t-s) \cdot \frac{\partial(t-s)}{\partial t} = -\frac{s}{t^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(\tfrac{s}{t}, t-s) + \frac{\partial f}{\partial v}(\tfrac{s}{t}, t-s) \ .$$

5.3 (úhly grafů funkcí)
Nalezněte úhel, který svírají

(a) graf funkce $f(x,y) = \ln(\sqrt{x^2+y^2})$ a plocha $M : (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 2$ v bodě $(1,0,?)$.

(b) graf funkce $f(x,y) = e^{\sin xy}$ a plocha $M : (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 = 7$ v bodě $(0,2,?)$.

(c) plocha $N :\ 2x^2 + y^2 + z^2 = 1$ a plocha $M : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 = 0$ v bodě $(0,-1,0)$.

Řešení:
Úhel, který svírají implicitně dané plochy M_1 a M_2, je dán jako úhel mezi jednotlivými tečnými rovinami a ten je zase určen jejich normálovými vektory n_1 a n_2, tj. gradienty funkcí Φ_1 a Φ_2. Z možných dvou (navzájem doplňkových) úhlů mezi tečnými rovinami si volíme ten menší. Tento úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ má tedy nezáporný kosinus a je tudíž jednoznačně určen jako

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} \ .$$

(a) Třetí souřadnice bodu $A = (1,0,?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(1,0) = \ln(1) = 0$. Tedy jde o bod $A = (1,0,0)$. Je dobře ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x,y,z) = f(x,y) - z = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) - z \ .$$

Plocha M je zadaná implicitně funkcí

$$\Phi_2(x,y,z) = (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 - 2 \ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (1,0,0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \nabla\Phi_1(A) = \Big(\frac{x}{x^2+y^2},\ \frac{y}{x^2+y^2},\ -1\Big)_{|A} = (1,0,-1)$$

$$\vec{n}_2 = \nabla\Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ 2(y+1),\ 2(z+1)\Big)_{|A} = (0,2,2)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

(b) Třetí souřadnice bodu $A = (0, 2, ?)$, který je na grafu funkce f, je dána hodnotou $f(0, 2) = e^{\sin 0} = 1$. Tedy jde o bod $A = (0, 2, 1)$. Je dobré ještě ověřit, že takto určený bod skutečně leží v M.

Graf funkce f si zadejme implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x, y, z) = e^{\sin(xy)} - z \ .$$

Plocha M je zadána implicitně funkcí

$$\Phi_2(x, y, z) = (x-1)^2 + \frac{y^2}{2} + (z-3)^2 - 7 \ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (0, 2, 1)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \nabla\Phi_1(A) = \Big(y\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ x\cos(xy)e^{\sin(xy)},\ -1\Big)_{|A} = (2, 0, -1)$$

$$\vec{n}_2 = \nabla\Phi_2(A) = \Big(2(x-1),\ y,\ 2(z-3)\Big)_{|A} = (-2, 2, -4)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = 0$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{2}$ a plochy jsou vzájemně kolmé.

(c) Plocha N je zadána implicitně pomocí funkce

$$\Phi_1(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - 1 \ .$$

Plocha M je zadána implicitně funkcí

$$\Phi_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 3 \ .$$

Normálové vektory tečných rovin v $A = (0, -1, 0)$ jsou

$$\vec{n}_1 = \nabla\Phi_1(A) = \Big(4x,\ 2y,\ 2z\Big)_{|A} = (0, -2, 0)$$

$$\vec{n}_2 = \nabla\Phi_2(A) = \Big(2x-2,\ 2y+4,\ 2z\Big)_{|A} = (-2, 2, 0)$$

Úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ je dán jako $\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1|| \cdot ||\vec{n}_2||} = \frac{4}{2 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tedy $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

5.4 Najděte rovnici tečné roviny k ploše M, která je rovnoběžná s rovinou ϱ jestliže

(a) $M:\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ a $\varrho:\ 4x + 2y + z = 3$.

(b) $M:\ 3x^2 + y^2 + 3z^2 = 1$ a $\varrho:\ -12x + 2y + 6z = 0$.

(c) $M:\ x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$ a $\varrho:\ 2x + 2y + z = 0$.

Řešení:
(a) Použijeme větu o tečné rovině k implicitně definované ploše v $\mathbb{R}^3$.

Elipsoid $M = \{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$ je implicitně zadán pomocí funkce $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$ a množiny $U = \mathbb{R}^3$. Zřejmě $\nabla\Phi(a) = (2x, 4y, 2z)$.

Ověříme si, že v každém bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je skutečně $\nabla\Phi(a_0) \neq \vec{0}$ (tj. že v každém bodě M máme k dispozici normálový vektor tečné roviny $\nabla\Phi(a_0)$):

Dokážeme to nepřímo: zřejmě $\nabla\Phi(a) = (2x, 4y, 2z) = \vec{0}$ právě když $a = (0, 0, 0)$. Ovšem tento bod není v M, protože nesplňuje $\Phi(a) = 0$.

Normálový vektor tečné roviny v bodě $a_0 = (x_0, y_0, z_0) \in M$ je tedy právě $\nabla\Phi(a_0)$. Tato rovina bude rovnoběžná s ϱ, která má normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho = (4, 2, 1)$, právě když

$$(2x_0, 4y_0, 2z_0) = \nabla\Phi(a_0) = \lambda \cdot \mathbf{n}_\varrho = \lambda \cdot (4, 2, 1)$$

pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$, tedy $(x_0, y_0, z_0) = (2\lambda, \lambda/2, \lambda/2)$. Současně má také platit, že $x_0^2 + 2y_0^2 + z_0^2 = 1$. Po dosazení pak dostaneme $(2\lambda)^2 + 2(\lambda/2)^2 + (\lambda/2)^2 = 1$ tedy $\lambda = \pm 2/\sqrt{19}$.

Hledané tečné roviny pak musí mít normálový vektor $\mathbf{n}_\varrho$, tedy rovnici $4x + 2y + z = c$, kde neznámé hodnoty $c \in \mathbb{R}$ určíme dosazením spočítaných bodů $a_0 = \pm\frac{1}{\sqrt{19}} \cdot (4, 1, 1)$, kterými tečné roviny musí procházet. Výsledek je

$$4x + 2y + z = \sqrt{19}$$

a

$$4x + 2y + z = -\sqrt{19}.$$

(b) Podobně jako v (a) dostaneme rovnice

$$(6x_0, 2y_0, 6z_0) = \lambda \cdot (-12, 2, 6)$$
$$3x_0^2 + y_0^2 + 3z_0^2 = 1$$

s řešením $\lambda = \pm\frac{1}{4}$ a $(x_0, y_0, z_0) = \pm\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ a rovnice rovin

$$-12x + 2y + 6z = \frac{1}{2}$$

a

$$-12x + 2y + 6z = -\frac{1}{2}.$$

(c) Plocha M je jednodílný eliptický hyperboloid. Budeme postupovat podobně jako v (a). Pro funkci $\Phi(x, y, z) = x^2 + 4y^2 - z^2 - 4$ je $\nabla\Phi(x, y, z) = (2x, 8y, -2z) \neq \vec{0}$ pro $(x, y, z) \in M$.

Opět dostaneme rovnice

$$(2x_0, 8y_0, -2z_0) = \lambda \cdot (2, 2, 1)$$
$$x_0^2 + 4y_0^2 - z_0^2 = 4$$

s řešením $\lambda = \pm 2$ a $(x_0, y_0, z_0) = \pm\left(2, \frac{1}{2}, -1\right)$ a rovnice rovin

$$2x + 2y + z = 4$$

a

$$2x + 2y + z = -4.$$

5.5 Pro spojitě diferencovatelná funkce $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ transformujte diferenciální výraz $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x}$ pomocí polárních souřadnic

$$\begin{aligned} \Phi : (0, +\infty) \times (0, 2\pi) &\to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x \geq 0\} \\ (r, \varphi) &\mapsto (x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \end{aligned}$$

Řešení:
Spočítáme si derivaci g jako $dg(\alpha) = df(\Phi(\alpha)) \circ d\Phi(\alpha)$, pro $\alpha = (r, \varphi)$, tedy pomocí matic to je

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Odsud vypočítáme např. invertováním matice

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}^{-1} = \left(\frac{\partial g}{\partial r}, \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \\ -\frac{\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}$$

Takže po dosazení (a vyjádření x a y pomocí r a φ) dostáváme

$$x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = r\cos\varphi\left(\sin\varphi\,\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) - r\sin\varphi\left(\cos\varphi\,\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\,\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right) = \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi}$$

Jestliže nyní máme např. rovnici $x\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ na $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$, pak je ekvivalentní rovnici $\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$ na $U = (0, +\infty) \times (0, 2\pi)$. Tedy má platit $\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 0$, neboli $g(r, \varphi) = h(r)$ pro nějakou diferencovatelnou funkci h. Řešení původní rovnice tak je

$$f(x,y) = (g \circ \Phi^{-1})(x,y) = h(\sqrt{x^2 + y^2})$$

kde h je libovolná diferencovatelná funkce.