6. cvičení z Matematické analýzy 2

27. - 31. března 2023

6.1 Nalezněte Taylorův rozvoj druhého řádu funkce f v bodě a_0, jestliže

(a) $f(x,y) = x^2 + xy - y$, $a_0 = (1,2)$,

(b) $f(x,y) = xe^{\sin y}$, $a_0 = (-1,0)$.

Řešení:
(i) Máme

$$\nabla f(a_0) = (2x + y,\ x - 1)_{|a_0} = (4,0)$$

a

$$H_f(a_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tedy pro $a = (x,y)$ je

$$T(x,y) = f(a_0) + \mathrm{d}f(a_0)[a - a_0] + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a_0)[a - a_0, a - a_0] =$$

$$= 1 + (4,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1, y-2)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + 4(x-1) + (x-1)^2 + (x-1)(y-2)\ .$$

(ii) Podobně dostaneme:

$$\nabla f(a_0) = \left(e^{\sin y},\ x \cos y\ e^{\sin y}\right)_{|a_0} = (1,-1)$$

a

$$H_f(a_0) = \begin{pmatrix} 0 & \cos y\ e^{\sin y} \\ \cos y\ e^{\sin y} & -x \sin y\ e^{\sin y} + x \cos^2 y\ e^{\sin y} \end{pmatrix}_{|a_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tedy pro $a = (x,y)$ je

$$T(x,y) = f(a_0) + \mathrm{d}f(a_0)[a - a_0] + \frac{1}{2!}\mathrm{d}^2 f(a_0)[a - a_0, a - a_0] =$$

$$= -1 + (1,-1)\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x+1, y)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= 1 + (x+1) - y + (x+1)y + \frac{1}{2}y^2\ .$$

Budeme vyšetřovat extrémy funkcí. Nejdříve to budou *lokální* extrémy funkce f na *otevřené* množině U.

Postup při hledání *lokálních* extrémů funkce f na *otevřené* množině U bude tento:

- najdeme body $a \in U$, kde je $\mathrm{d}f(a) = (0,\dots,0))$ (nutná podmínka);
- dále pak vyšetříme definitnost $\mathrm{d}^2 f(a)$ v těchto bodech.

Více viz "Poznámky k extrémům."

6.2 (lokální extrémy)
Najděte lokální extrémy následujících funkcí:

(a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(b) $f(x,y) = x^3 + xy^2 - 6xy$,

(c) $f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x, y, z > 0$.

Řešení:
(a) Funkce je polynom a tedy má derivace všech řádů. Nutnou podmínkou pro extrém v daném bodě je nulovost první derivace.

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)$$

Tedy $\nabla f(x,y) = (0,0)$ právě když $x^2 = y$ a $y^2 = x$, což je právě když $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (1,1)$. V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci $\mathrm{d}^2 f$ (tedy Hessovu matici H_f):

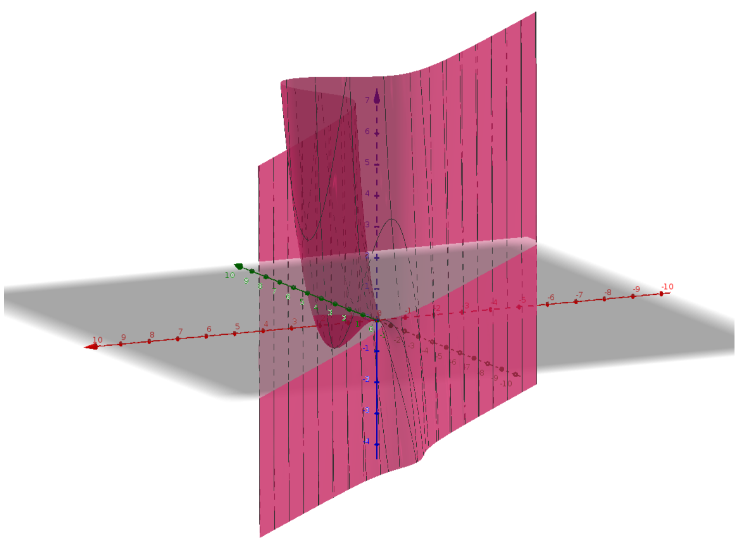
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

- Pro $(x,y) = (0,0)$ je $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$\mathrm{d}^2 f(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = -6h_1h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

- Pro $(x,y) = (1,1)$ je $H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$. Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 6 > 0$, $\Delta_2 = 36 - 9 = 27 > 0$) je forma pozitivně definitní a tedy v daném bodě je (lokální) MINIMUM. Toto minimum ale není globální, protože funkce není zdola omezená (lze vzít např. zúžení $f(x,0) = x^3$).



(b) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 + y^2 - 6y,\ 2xy - 6x)$$

Tedy $\nabla f(x,y) = (0,0)$ právě když $3x^2 + y^2 - 6y = 0$ a $xy = 3x$. Z druhé rovnice plyne bud $x = 0$ nebo $y = 3$. Dosazením $x = 0$ do první rovnice máme $y^2 - 6y = 0$, tedy $y = 0$ nebo $y = 6$. Dosazením $y = 3$ do první rovnice máme $3x^2 = 9$, tedy $x = \pm\sqrt{3}$. Řešení jsou tak $(x,y) = (0,0)$ nebo $(x,y) = (0,6)$ nebo $(x,y) = (\pm\sqrt{3}, 3)$.

V daných (kritických) bodech dále vyšetříme druhou derivaci d^f (tedy Hessovu matici H_f).

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y-6 \\ 2y-6 & 2x \end{pmatrix}$$

• Pro $(x,y) = (0,0)$ je $H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy pro $\vec{h} = (h_1, h_2)^T \in \mathbb{R}^2$ je

$$\mathrm{d}^2 f(0,0)[\vec{h}, \vec{h}] = -12 \cdot h_1 h_2$$

a tato forma nabývá libovolných hodnot (je indefinitní). V bodě $(0,0)$ je tedy SEDLO.

• Pro $(x,y) = (0,6)$ je $H_f(0,6) = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$. Tedy ze stejných důvodů jako výše je v bodě $(0,6)$ SEDLO.

• Pro $(x,y) = (\sqrt{3}, 3)$ je

$$H_f\left(\sqrt{3}, 3\right) = \begin{pmatrix} 6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Tedy všechna vlastní čísla jsou kladná a proto je forma pozitivně definitní a v bodě je tak lokální minimum.

• Pro $(x,y) = (-\sqrt{3}, 3)$ je

$$H_f\left(-\sqrt{3}, 3\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{3} & 0 \\ 0 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Tedy všechna vlastní čísla jsou záporná a proto je forma negativně definitní a v bodě je tak lokální maximum.

Lokální maxima ani minima nejsou globální, protože funkce není shora ani zdola omezená - např. stačí vzít zúžení $f(x,0) = -x^3$.

(c) Nutnou podmínkou pro lokální extrém v daném bodě je nulovost první derivace:

$$\mathrm{d}f(x,y,z) = \left(1 - \frac{y^2}{4x^2},\ \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2},\ \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2}\right)$$

Tedy $\mathrm{d}f(x,y,z) = 0$ právě když

$$\begin{array}{rcl} y^2 & = & 4x^2 \\ y^3 & = & 2xz^2 \\ y & = & z^3 \end{array} \quad \overset{y=z^3}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{rcl} (z^3)^2 & = & 4x^2 \\ (z^3)^3 & = & 2xz^2 \end{array} \quad \overset{x=z^7/2}{\Longrightarrow} \quad z^6 = 4\left(\frac{z^7}{2}\right)^2 \quad \overset{z>0}{\Longrightarrow} \quad z = 1$$

Řešení pro $x, y, z > 0$ je pouze $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$.

Dále vyšetříme druhou derivaci.

$$H_f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2x^3} & -\frac{y}{2x^2} & 0 \\ -\frac{y}{2x^2} & \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3} & -\frac{2z}{y^2} \\ 0 & -\frac{2z}{y^2} & \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3} \end{pmatrix}$$

- Pro $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$ je

$$H_f\left(\frac{1}{2},1,1\right) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria ($\Delta_1 = 4 > 0$, $\Delta_2 = 12-4 = 8 > 0$, $\Delta_3 = 72-16-24 = 32 > 0$) je forma daná druhou derivaci pozitivně definitní a tedy v daném bodě je lokální MINIMUM.

Toto minimum je dokonce globální. K tomu se ale musí použít menší trik využívající doplnění na čtverec v podobě $x^2 + \frac{\alpha^2}{x^2} = \left(x - \frac{\alpha}{x}\right)^2 + 2\alpha$. Pro $x,y,z > 0$ máme

$$f(x,y,z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} = \left(\sqrt{x} - \frac{y}{2\sqrt{x}}\right)^2 + y + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z} =$$

$$= \left(\sqrt{x} - \frac{y}{2\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \frac{z}{\sqrt{y}}\right)^2 + 2z + \frac{2}{z} = \left(\sqrt{x} - \frac{y}{2\sqrt{x}}\right)^2 + \left(\sqrt{y} - \frac{z}{\sqrt{y}}\right)^2 + 2\left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 + 4$$

takže v bodě (x,y,z) splňujícím $\sqrt{x} = \frac{y}{2\sqrt{x}}$, $\sqrt{y} = \frac{z}{\sqrt{y}}$ a $\sqrt{z} = \frac{1}{\sqrt{z}}$ je globální minimum funkce f s hodnotou 4 (pokud ovšem tyto rovnice mají řešení!). Tento bod je právě $(x,y,z) = \left(\frac{1}{2},1,1\right)$.

6.3 Je dána funkce $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + \alpha xy + y$, kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) Určete všechny hodnoty parametru α tak, aby funkce f byla konvexní.

(b) Pro každou hodnotu parametru α z předchozího bodu nalezněte všechny body minima funkce f.

Řešení:

(a) Funkce třídy C^2 na konvexní otevřené množině U je konvexní právě když v každém bodě $a \in U$ je Hessova matice $H_f(a)$ pozitivně semidefinitní.

Máme

$$\nabla f(x,y) = (2x + \alpha y,\ 4y + \alpha x + 1)$$

a Hessova matice je

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 4 \end{pmatrix}.$$

Podle Sylvestrova kriteria je symetrická matice A typu $n \times n$ pozitivně definitní právě když pro každé $\emptyset \neq K \subseteq \{1,\ldots,n\}$ je $\det(A_K) \geq 0$, kde A_K je matice vzniklá z původní matice A vynecháním i-tých sloupců a j-tých řádků pro $i,j \in \{1,\ldots,n\} \setminus K$.

V našem případě je f konvexní právě když $2 \geq 0$, $4 \geq 0$ a $8 - \alpha^2 \geq 0$, tedy $|\alpha| \leq \sqrt{8}$.

(b) Pro funkci třídy C^1 na otevřené konvexní množině U je bod $a \in U$ bodem globálního minima právě když a je stacionární bod (tj. $\nabla f(a) = (0,0)$).

Pro $|\alpha| \leq \sqrt{8}$ máme $\nabla f(x,y) = (0,0)$ právě když

$$2x + \alpha y = 0$$

$$\alpha x + 4y = -1$$

tedy dosazením $x = -\frac{\alpha}{2}y$ do druhé rovnice máme $(-\frac{\alpha^2}{2} + 4)y = -1$.

Ta je řešitelná pro α výše právě když $|\alpha| < \sqrt{8}$ a řešení, tedy bod minima, je $(x,y) = \left(\frac{\alpha}{8-\alpha^2}, \frac{-2}{8-\alpha^2}\right)$.

6.4 Metodou nejmenších čtverců proložte body $(-1,0)$, $(-\frac{1}{2},3)$, $(0,2)$ a $(\frac{1}{2},1)$ graf funkce

(i) $f(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

(ii) $f(x) = a\sin(\pi x) + b\cos(\pi x)$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

Řešení:
Pro zadané body (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$ hledáme takové $a, b \in \mathbb{R}$, které minimalizují funkci

$$g(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \ .$$

(i) Funkci g si konkrétně vyjádříme pomocí matic a norem jako

$$g(a,b) = \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \right\|^2$$

Tato funkce je konvexní a minimum nastává právě pro (a,b), které jsou řešením rovnice

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbb{A}^T \vec{u}$$

tedy

$$\begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{8}{5} \end{pmatrix} \ .$$

(ii) Postupujeme podobně jako v (i). Máme

$$g(a,b) = \left\| \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\vec{u}} \right\|^2$$

Minimum nastává právě pro (a,b), které jsou řešením rovnice

$$\mathbb{A}^T \mathbb{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \mathbb{A}^T \vec{u}$$

tedy

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix} .$$