7. cvičení z Matematické analýzy 2

3. - 7. dubna 2023

Budeme hledat *absolutní (globální)* extrémy funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M.

Postup při hledání *absolutních (globálních)* extrémů funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M bude tento:

- pomocí nutných podmínek (obvykle to jsou Lagrangeovy multiplikátory) vyloučíme ty body, kde určitě extrémy nejsou;
- ve zbylé množině podezřelých bodů (obvykle malé) srovnáme jejich funkční hodnoty, ze kterých vybereme největší a nejmenší;
- jestliže víme, že obou extrémů musí být nabyto, pak jsou to právě předchozí nalezené největší a nejmenší hodnoty v podezřelých bodech;
- při hledání pouze globálního minima podstupujeme obdobně - tj. hledáme nejmenší hodnotu mezi podezřelými body;
- Důležité: zde nepotřebujeme používat druhou derivaci! (Ostatně, globálnost případného extrému nám tato druhá derivace stejně nemůže potvrdit.)

Poznámka: Nechť M má tvar z Lagr. věty. Jestliže nějaký bod $a \in M$ nesplňuje podmínku o lineární nezávislosti $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_k(a)$, zařadíme ho automaticky mezi podezřelé body. Obvykle takových bodů není mnoho, případně funkce je na nich "uchopitelná". Proto při aplikaci Lagr. věty vlastně vždy ověřujeme, jestli všechny body z M splňují uvedenou podmínku pro lineární nezávislost. Pokud ano, vazbám $g_1, \dots, g_k$ se pak říká nezávislé.

Při hledání absolutních extrémů budeme využívat tyto věty:

Věta: Spojitá funkce na uzavřené a omezené (tzv. *kompaktní*) množině nabývá svého maxima i minima.

Věta: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, k$ jsou spojitě diferencovatelné funkce. Položme

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} \{a \in U \mid g_i(a) = 0\}.$$

Nechť $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M. Jestliže vektory

$$\nabla\, g_1(a_0), \dots, \nabla\, g_k(a_0) \ \text{ jsou lineárně nezávislé}$$

pak existují $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Langrangeovy multiplikátory*), že

$$\nabla f(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \nabla g_i(a_0)\ .$$

(Jestliže výše zmíněná lineární nezávislost platí v každém bodě $a \in M$, pak se množina M nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb.)

Více viz "Poznámky k extrémům."

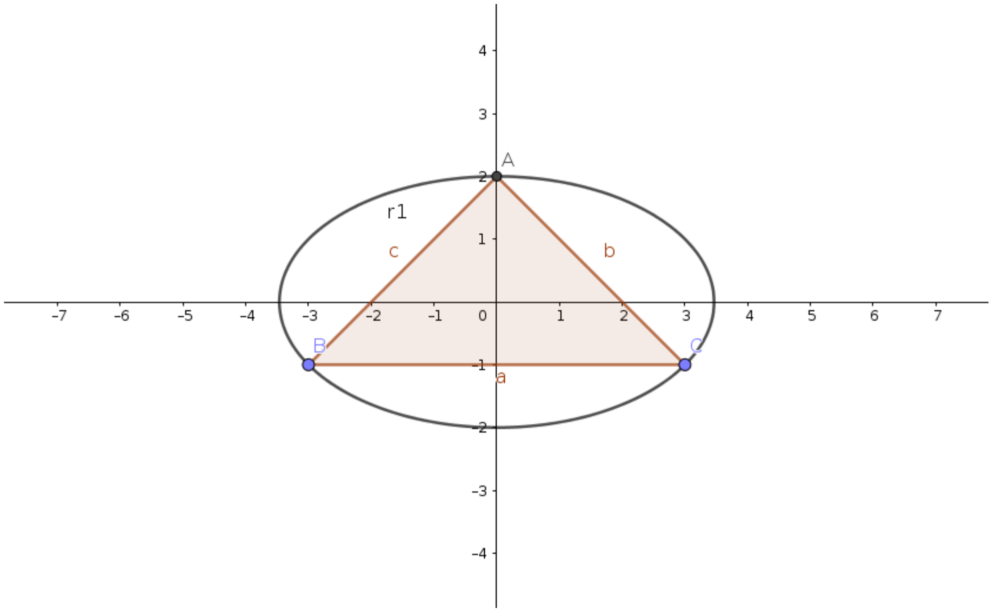
7.1 (vázané extrémy)

Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$ vepište rovnoramenný trojúhelník takový, že má základnu rovnoběžnou s osou x a má maximální obsah.

Řešení:
Vzhledem k symetrii elipsy, stačí vyšetřit případ, kdy jeden z vrcholů (x, y) základny bude ležet na polovině elipsy

$$M : x^2 + 3y^2 = 12 \quad \& \quad x > 0$$

a vrchol naproti základně bude v bodě $(0, 2)$.



Na M nyní hledáme maximum funkce

$$f(x,y) = x(2-y)$$

(což je obsah daného trojúhelníka).

Použijeme metodu Langrangeových multiplikátorů. Množina M je zadána implicitně jako

$$M = \{(x,y) \in U \mid \Phi(x,y) = 0\}$$

kde $U : x > 0$ a vazbová funkce je

$$\Phi(x,y) = x^2 + 3y^2 - 12 \ .$$

Dále, vektor $\nabla\ \Phi(x,y) = \Big(2x,\ 6y\Big)$ je nenulový pro každé $(x,y) \in M$ (jinak by to byl spor s tím, že má platit $x^2 + 3y^2 = 12$).

Věta o Lagrangeových multiplikátorech nám tedy říká, že pro extrém $a = (x,y)$ existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2-y,\ -x\big) = \nabla f(a) = \lambda \cdot \nabla\Phi(a) = \lambda \cdot \Big(2x,\ 6y\Big)$$

a

$$x^2 + 3y^2 = 12.$$

Z rovnic a omezení množinou U plyne, že ani jedna z hodnot x, y nemůže být nulová, takže máme

$$\begin{array}{rcl} 2-y &=& 2\lambda x \\ -x &=& 6\lambda y \\ x^2+3y^2 &=& 12 \end{array} \quad \overset{\lambda=-x/(6y)}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} 2-y = -\frac{x^2}{3y} \\ x^2+3y^2 = 12 \end{array} \quad \overset{x^2=12-3y^2}{\Longrightarrow} \quad 3y(2-y) = 3y^2 - 12 \quad \overset{(x,y)\in M}{\Longrightarrow} \quad y = -1$$

tedy jediné řešení je $(x,y) = (3,-1)$ s hodnotou $f(3,-1) = 9$.

Abychom věděli, že spojitá funkce f bude nabývat svého maxima, potřebujeme množinu M uzavřít (omezená pak už bude). To znamená přidat k M body $(0,2)$ a $(0,-2)$, které se tímto stanou dalšími podezřelými body z extrému. Jejich odpovídající hodnoty jsou

$$f\big(0,2\big) = f\big(0,-2\big) = 0 \ .$$

Množina $\overline{M} = M \cup \{(0,2),\ (0,-2)\}$ je nyní uzavřená a omezená množina a spojitá funkce tak na $\overline{M}$ nabývá svého maxima a minima.

Porovnáním hodnot podezřelých bodů vidíme, že pro vrchol $(3,-1)$ je skutečně nabyt maximální obsah.

7.2 (vázané extrémy - vzdálenost)
Vypočtěte vzdálenost nejbližšího bodu hyperboly $M: \; x^2 + 5xy + y^2 = 9$ od počátku $(0,0)$.

Řešení:
Hyperbole je uzavřená množina, ale NENÍ omezená. Ke zjištění vzdálenosti od počátku $(0,0)$ si vezmeme funkci

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

protože se čtvercem vzdálenosti se lépe pracuje. Tato funkce "v nekonečnu roste do nekonečna" (tj. splňuje podmínky o nabytí globálního minima na M). Kandidáta na minimum můžeme opět najít metodou Lagr. multiplikátorů.

Máme tedy $f(x,y) = x^2 + y^2$ a vazbovou funkci $g(x,y) = x^2 + 5xy + y^2 - 9$. Zřejmě pro $(x,y) \in M$ je $\nabla g(x,y) = \Big(2x + 5y, 5x + 2y\Big) \neq (0,0)$ (jinak by bylo $(x,y) = (0,0)$, což nesplňuje vazbovou podmínku).

Pro bod $a = (x,y) \in M$ lokálního extrému f na M tak existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\big(2x, 2y\big) = \nabla f(a) = \lambda \cdot \nabla g(a) = \lambda\Big(2x + 5y, 5x + 2y\Big)\;.$$

Máme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda(2x + 5y) \\ 2y &= \lambda(5x + 2y) \\ x^2 + 5xy + y^2 &= 9 \end{aligned}$$

Vydělením prvních dvou rovnic dostaneme $\frac{2x}{2y} = \frac{\lambda(2x+5y)}{\lambda(5x+2y)} = \frac{2x+5y}{5x+2y}$ a tedy $x(5x + 2y) = y(2x + 5y)$ neboli $x^2 = y^2$ a tudíž $x = \pm y$.

(Dělit ovšem můžeme jen nenulovým výrazem. Podíváme se, jestli v tom případě nedostaneme také nějaké řešení. Pokud by nastalo, že $0 = 2y = \lambda(5x + 2y)$, pak $y = 0$ a $0 = \lambda x$. Tedy buď je $x = 0$ nebo $\lambda = 0$. Možnost $\lambda = 0$ dosazením do první rovnice implikuje opět, že $x = 0$. Tedy dostali bychom $(x,y) = (0,0)$, což nesplňuje třetí rovnici. Tedy možnost nulové druhé rovnice nás z hlediska řešení celé soustavy nemusí zajímat.)

- Dosazením $x = -y$ do rovnice $x^2 + 5xy + y^2 = 9$ máme $-3x^2 = 9$, což nemá řešení.
- Dosazením $x = y$ do rovnice $x^2 + 5xy + y^2 = 9$ máme $7x^2 = 9$. Tedy podezřelé body jsou

$$a_0 = (x,y) = \pm\left(\tfrac{3}{\sqrt{7}}, \tfrac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

s hodnotou $f(a_0) = \frac{18}{7}$. Podle věty o nabývání minima je tato hodnota skutečně minimální, takže vzdálenost bodu $(0,0)$ od hyperboly je $\sqrt{\frac{18}{7}}$.

Na úlohu lze také nahlížet geometricky: hledáme takový bod $(x,y) \in M$, aby jeho průvodič z počátku $(0,0)$, tj. vektor $\vec{h} = (x,y) - (0,0)$ byl kolmý na tečnou přímku k M v bodě (x,y). Tato tečná přímka má za normálový vektor $\nabla\, g(x,y)$. Musíme tedy vyřešit systém podmínek $\vec{h} = \lambda \cdot \nabla\, g(x,y)$ pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}$ a $(x,y) \in M$. A to už je totéž jako výše.

Abychom si mohli ještě představit, jak hyperbola vypadá, můžeme použít tuto úvahu. Množina M je vrstevnice funkce $h(x,y) = x^2 + 5xy + y^2$ na hladině 9. Graf funkce h je hyperbolický paraboloid (níže bude vidět proč) a proto jeho vrstevnice jsou buď paraboly nebo dvě protínající se přímky. Tyto přímky představují asymptoty těchto hyperbol a budou určeny jako vrstevnice h na hladině 0. Použijeme doplnění na čtverec:

$$h(x,y) = x^2 + 5xy + y^2 = \left(x + \frac{5}{2}y\right)^2 - \frac{25}{4}y^2 + y^2 = \left(x + \frac{5}{2}y\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{21}}{2}y\right)^2$$

Tedy vhodnou lineární transformací převedeme h na $\widetilde{h}(x',y') = x'^2 - y'^2$, což je právě sedlová plocha. Asymptoty hyperboly jsou tedy dány jako $\left(x + \frac{5}{2}y\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{21}}{2}y\right)^2$ neboli $x + \frac{5}{2}y = \pm\left(\frac{\sqrt{21}}{2}y\right)$, tj. $x = -\frac{5+\sqrt{21}}{2}y \doteq -4.79y$ a $x = -\frac{5-\sqrt{21}}{2}y \doteq -0.21y$. A konečně je potřeba určit, kde se hyperbola vzhledem k asymptotám nachází a k tomu si stačí uvědomit, že hyperbola má průnik s oběma souřadnými osami.

7.3 (vázané extrémy)

Na elipse $M: \ x^2 + 4y^2 = 4$ nalezněte body, které mají největší a nejmenší vzdálenost od přímky $p: \ 2x + 3y - 6 = 0$.

Řešení:

Použijeme explicitní tvar funkce vyjadřující vzdálenost bodu $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ od přímky dané rovnicí $\alpha x' + \beta y' + \gamma = 0$, a sice $f(x,y) = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma|}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}$.

Odvození vzorce: Uděláme to rovnou pro vzdálenost bodů od roviny v $\mathbb{R}^3$ (pro $\mathbb{R}^2$ je analogické odvození úplně stejné). Nechť rovina ρ v $\mathbb{R}^3$ má rovnici $\alpha x' + \beta y' + \gamma z' + \delta = 0$. Její normálový vektor je tedy $n = (\alpha, \beta, \gamma)$ a rovnici pro bod $a' = (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$ pak můžeme napsat pomocí skalárního součinu jako $n \cdot a' = -\delta$. Zvolme si nyní nějaký bod $b \in \mathbb{R}^3$ v rovině ρ. Vzdálenost bodu $a = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ od roviny ρ je nyní dána jako velikost kolmého průmětu vektoru $a - b$ do směru normálového vektoru n, tedy pomocí vztahu

$$\left|(a-b) \cdot \frac{n}{\|n\|}\right|.$$

Protože bod b je v rovině ρ, platí $n \cdot b = -\delta$. Můžeme tedy psát

$$\left|(a-b) \cdot \frac{n}{\|n\|}\right| = \frac{|a \cdot n - b \cdot n|}{\|n\|} = \frac{|a \cdot n + \delta|}{\|n\|} = \frac{|\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}.$$

Budeme tedy hledat maximum a minimum funkce

$$f(x,y) = \frac{|2x + 3y - 6|}{\sqrt{2^2 + 3^2}}$$

za podmínky $x^2 + 4y^2 = 4$. Protože f není všude diferencovatelná, můžeme si pomoci buď tak, že

- si vezmeme místo toho ekvivalentní zadání, kde hledáme minimum a maximum funkce

$$g(x,y) = 13 \cdot \Big(f(x,y)\Big)^2 = (2x + 3y - 6)^2$$

  (snažíme se o co nejjednodušší tvar, bez zbytečných konstant) nebo

- si všimneme, že M nemá průnik s přímkou p, což znamená, že leží v jedné z otevřených polorovin určených přímkou p (protože M je *souvislá* množina - je totiž obloukově souvislá). V tom případě je výraz $2x + 3y - 6$ na všech bodech z M vždy buď jen kladný nebo jen záporný. Hledání extrému funkce f pak ekvivalentně odpovídá hledání extrému funkce

$$h(x,y) = 2x + 3y - 6.$$

Zvolíme si druhou variantu (i když ani první není o nic těžší).

Pro body na elipse M dané vazbou $\Phi(x,y) := x^2 + 4y^2 - 4(= 0)$ je zřejmě $\nabla\Phi(x,y) = (2x, 8y) \neq \vec{0}$. Pro bod $a = (x,y) \in M$ absolutního extrému h na elipse M existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(2,\ 3) = \nabla h(a) = \lambda \cdot \nabla\Phi(a) = \lambda\,(2x, 8y)\ .$$

Máme tak soustavu rovnic

$$\begin{aligned} 2 &= \lambda 2x \\ 3 &= \lambda 8y \\ x^2 + 4y^2 &= 4 \end{aligned}$$

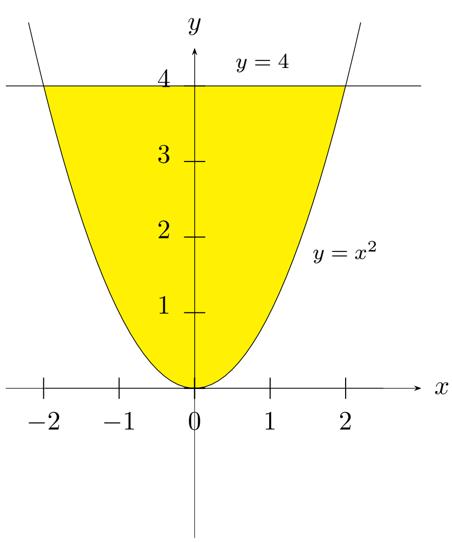
Vydělením prvních dvou rovnic dostaneme $\frac{2}{3} = \frac{2x}{8y}$ neboli $y = \frac{3}{8}x$. Po dosazení do rovnice elipsy dává rovnici $x^2 + \frac{9}{16}x^2 = 4$ tedy $x^2 = \frac{64}{25}$ neboli $x = \pm\frac{8}{5}$ tedy body $(x,y) = \pm\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$. V těch funkce f vzdálenosti od přímky nabývá hodnot $\frac{1}{\sqrt{13}}$ a $\frac{11}{\sqrt{13}}$.

Intuitivně: V bodech z M, které jsou od přímky p nejdál nebo nejblíže, musí být tečna k M rovnoběžná se zadanou přímkou. Úloha tedy odpovídá jedné z předchozích úloh (hledání rovnoběžných tečen).

7.4 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M:\quad x^2 \le y \le 4\ .$$

Řešení:
Množina M je část ležící nad parabolou a pod přímkou a je zřejmě omezená i uzavřená (je průnikem uzavřených množin).



Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ : \quad x^2 < y < 4$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M : \quad \begin{array}{l} (y = x^2 \quad \& \quad -2 \le x \le 2) \ \vee \\ (y = 4 \ \ \& \quad -2 \le x \le 2) \end{array}$$

kterou nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou dvě křivky (část paraboly a úsečka). POZOR: tyto dvě vazby ale NEPLATÍ současně! Každá vyjadřuje JINOU část okraje!

Extrém na M°: Nutnou podmínkou je nulovost první derivace:

$$(0,0) = \mathrm{d}f(x,y) = \big(6x^2 + 8x - 2y, 2y - 2x\big)$$

Toto nastává právě když je splněna soustava

$$y = 3x^2 + 4x$$

$$y = x \ .$$

Jediná řešení této soustavy $(0,0)$ a $(-1,-1)$ ale nepatří do M°, takže žádné podezřelé body zatím nedostáváme.

Extrém na ∂M:

Na obou křivkách můžeme použít Lagrangeovu větu, ale nejvhodnější bude zavést nějakou parametrizaci a vyšetřit lokální extrémy zúžených funkcí:

• část paraboly parametrizujeme přirozeně pomocí

$$\varphi_1 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(t) = (t, t^2) \ .$$

Pokud $a = \varphi_1(t_0)$ je bodem extrému f na části paraboly, pak je t_0 extrémem funkce $f \circ \varphi_1$ a tedy musí být $(f \circ \varphi_1)'(t_0) = 0$. Tuto úvahu ovšem můžeme udělat právě jen proto, že t_0 je VNITŘNÍM bodem intervalu $(-2,2)$. Z tohoto důvodu MUSÍME při vyšetřování části paraboly vynechat její koncové body, kde navazuje na úsečku (tyto koncové body automaticky zařadíme do podezřelých bodů).

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_1(t) := f(\varphi_1(t)) = f(t, t^2) = 4t^2 + t^4 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2) \ .$$

Máme $g_1'(t) = 8t + 4t^3 = 4t(2 + t^2) = 0$ právě když $t = 0$. Podezřelým bodem tak je $(0,0) \in \partial M$ s hodnotou $f(0,0) = 0$.

• podobně úsečku parametrizujeme přirozeně pomocí OTEVŘENÉHO intervalu

$$\varphi_2 : (-2,2) \to \mathbb{R}^2, \quad \varphi_2(t) = (t, 4) \ .$$

Budeme tedy vyšetřovat funkci

$$g_2(t) := f(\varphi_2(t)) = f(t,4) = 2t^3 + 4t^2 - 8t + 16 \quad \text{pro} \quad t \in (-2,2) \ .$$

Rovnice $g_2'(t) = 6t^2 + 8t - 8 = 6\left(t - \frac{2}{3}\right)(t+2) = 0$ má řešení jen pro $t = \frac{2}{3} \in (-2,2)$. Podezřelým bodem tak je $(\frac{2}{3}, 4) \in \partial M$ s hodnotou $f\left(\frac{2}{3}, 4\right) = \frac{16 \cdot 22}{27}$.

• zbývají už jen dva průsečíky křivek $(-2,4)$ a $(2,4)$ s hodnotami $f(-2,4) = f(2,4) = 32$, které taky zahrneme mezi podezřelé body.

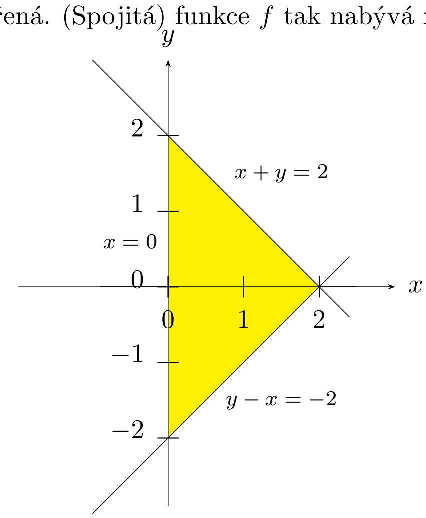
Porovnáním hodnot podezřelých bodů (tj. $32 > \frac{16 \cdot 22}{27} > 0$) dostáváme, že funkce evidentně nabývá svého maxima v bodech $(-2,4)$ a $(2,4)$ a minima v bodě $(0,0)$.

7.5 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x$ na ploše trojúhelníka M s vrcholy $(2,0)$, $(0,2)$ a $(0,-2)$.

Řešení:
Množina

$$M: \quad x \geq 0 \ \ \& \ \ x + y \leq 2 \ \ \& \quad y - x \geq -2$$

je zřejmě omezená i uzavřená. (Spojitá) funkce f tak nabývá na M svého maxima i minima.



Příklad rozdělíme na vyšetření (volného) extrému na otevřené množině

$$M^\circ: \quad x > 0 \ \ \& \ \ x + y < 2 \ \ \& \quad y - x > -2$$

a vázaného extrému na hranici

$$\partial M: \quad \begin{array}{l} (x + y = 2 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 2) \ \ \vee \\ (y - x = -2 \ \ \& \ \ 0 \leq x \leq 2) \ \ \vee \\ (x = 0 \ \ \& \ \ -2 \leq y \leq 2) \end{array}$$

kterou ale nejde vyjádřit pomocí jediné diferencovatelné vazby. Vazbami jsou tři otevřené úsečky (hrany trojúhelníku) a tři body (vrcholy trojúhelníku). Tyto vazby ale NEJSOU splněné SOUČASNĚ (což je vidět i z toho, že používáme logickou spojku "NEBO", nikoliv "A").

Extrém na M°: Nutná podmínka je nulovost první derivace:

$$(0,0) = \mathrm{d}f(x,y) = \big(2x - 2, 2y\big)$$

Toto nastává pro $a = (1,0) \in M^\circ$ a $f\,(1,0) = -1$.

Extrém na ∂M:

Pro každou z hran trojúhelníka můžeme použít Lagrangeovu větu, ale zde je jednodušší využít parametrizaci těchto hran.

• Horní hranu zparametrizujeme pomocí proměnné x jako

$$\varphi_1(x) = (x, 2 - x) \ \ \text{pro} \ \ x \in (0,2)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g_1(x) = (f \circ \varphi_1)(x) = f(x, 2-x) = x^2 + (2-x)^2 - 2x = 2x^2 - 6x + 4$$

pro $x \in (0, 2)$. Máme

$$g_1'(x) = 4x - 6 = 0$$

právě když $x = \frac{3}{2} \in (0, 2)$ (zdůrazněme, že tento interval nutně musí být OTEVŘENÝ - jinak nemůžeme použít nutnou podmínku, tj. nulovost derivace). Tedy podezřelý bod je $\left(\frac{3}{2}, 2 - \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

• Dolní hranu můžeme vyšetřit obdobně, ale ještě lépe je využít symetrie: funkce f i množina M zůstávají stejné při záměně y za $-y$ (tj. při použití osové symetrie podle osy x). Dostaneme tak druhý podezřelý bod $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ se stejnou hodnotou $f\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

• Boční hranu zparametrizujeme pomocí proměnné y jako

$$\varphi_3(y) = (0, y) \quad \text{pro} \quad y \in (-2, 2)$$

a vyšetříme tak (lokální) extrémy funkce

$$g_3(y) = (f \circ \varphi_3)(y) = f(0, y) = y^2$$

pro $y \in (-2, 2)$. Tato funkce má zřejmě extrém v bodě $y = 0$ a podezřelý bod je $(0, 0)$ s hodnotou $f(0, 0) = 0$.

• Posledními podezřelými body jsou vrcholy trojúhelníku (ty nelze zařadit do ostatních vazeb, protože ty musí být definovány v rámci otevřených množin - opět proto, abychom mohli derivovat).

Porovnáním hodnot podezřelých bodů

(x, y)	$f(x, y)$
$(1, 0)$	-1
$\left(\frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{1}{2}$
$(0, 0)$	0
$(0, \pm 2)$	4
$(2, 0)$	0

dostáváme, že funkce f nabývá svého minima v bodě $(1, 0)$ a maxima v bodech $(0, 2)$ a $(0, -2)$.

Poznámka: Grafem funkce $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x = (x-1)^2 + y^2 - 1$ na $\mathbb{R}^2$ je rotační paraboloid a je zřejmé, že v bodě $(1, 0)$ má ostré globální minimum na celém $\mathbb{R}^2$.

7.6 (vázané extrémy - aplikace)
Určete rozměry pravoúhlého odkrytého bazénu, který má při daném objemu V minimální povrch.

Řešení:
Nechť bazén má dno s rozměry $x, y > 0$ a výšku $z > 0$. Budeme tedy hledat minimum funkce

$$f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$$

na množině
$$M = \{(x, y, z) \in U \mid \Phi(x, y, z) = 0\},$$
kde
$$U: \; x, y, z > 0$$
je otevřená množina a
$$\Phi(x, y, z) = xyz$$
je vazbová funkce.

Protože U je OTEVŘENÁ a $\nabla\Phi(a) = (yz, xz, xy) \neq (0, 0, 0)$ pro každé $a \in M$, tak můžeme použít Langrangeovu podmínku pro extrém na M. Pro bod extrému $a = (x, y, z) \in M$ pak musí existovat $\lambda \in \mathbb{R}$, že
$$(y + 2z, x + 2z, 2x + 2y) = \nabla f(a) = \lambda \cdot \nabla\Phi(a) = \lambda(yz, xz, xy)$$
a
$$xyz = V \;\&\; x, y, z > 0 \;.$$

Máme tak rovnice:

$$\begin{array}{rcl} y + 2z &=& \lambda yz \\ x + 2z &=& \lambda xz \\ 2x + 2y &=& \lambda xy \\ xyz &=& V \end{array} \quad \xRightarrow{\text{vynásobení rovnic vhodnou proměnnou}} \quad \begin{array}{rcl} xy + 2xz &=& \lambda xyz = \lambda V \\ xy + 2yz &=& \lambda xyz = \lambda V \\ 2xz + 2yz &=& \lambda xyz = \lambda V \\ xyz &=& V \end{array}$$

Z prvních dvou rovnic máme $xy + 2xz = \lambda V = xy + 2yz$, tedy $x = y$. Z druhé a třetí rovnice máme $xy + 2yz = \lambda V = 2xz + 2yz$, tedy $y = 2z$. Po dosazení $x = y = 2z$ do čtvrté rovnice máme $V = 2z \cdot 2z \cdot z$, tedy $z = \sqrt[3]{\frac{V}{4}}$.

Takže jediný podezřelý bod z extrému je $a = \left(2\sqrt[3]{\frac{V}{4}}, 2\sqrt[3]{\frac{V}{4}}, \sqrt[3]{\frac{V}{4}}\right)$.

Množina M je uzavřená (je to průnik uzavřené množiny dané rovností $V = xyz$ a uzavřené množiny dané neostrými nerovnostmi $x, y, z \geq 0$), ale NENÍ omezená. Potřebujeme tedy využít:

Větu o nabytí globálního minima: Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na uzavřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť dále platí
$$(\forall\ K > 0)(\exists\ L > 0)(\forall\ a \in M) \qquad \|a\| \geq L \Rightarrow f(a) \geq K$$
(tj. jestliže se s bodem a vzdalujeme od počátku, jde hodnota $f(a)$ do plus nekonečna).
Pak funkce f nabývá na M svého globálního minima.

Ověření podmínky po funkci f chce menší trik: pro body $a = (x, y, z) \in M$ máme s využitím podmínek $x, y, z > 0$ a $xyz = V$, že
$$\big(f(a)\big)^2 = (xy + 2yz + 2xz)^2 \geq (xy + yz + xz)^2 = x^2y^2 + y^2z^2 + x^2y^2 + 2xyz(x + y + z) \geq$$
$$\geq 2V(x + y + z) \geq 2V\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2V\|a\| \;.$$

Celkově tedy $\big(f(a)\big)^2 \geq 2V\|a\|$ a tudíž $f(a) \geq \sqrt{2V} \cdot \sqrt{\|a\|}$. Tedy pokud nyní pro $a \in M$ bude $\|a\|$ dostatečně velké, bude dostatečně velká i hodnota $f(a)$.

Z této věty tedy vidíme, že nalezený podezřelý bod je skutečně bodem minima funkce f na M.

7.7 (vázané extrémy - aplikace)

Do úseče kužele $1 - z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ vymezené rovinou $z = 0$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení:
Budeme postupovat podobně jako v předchozím příkladu: Vzhledem k symetriím stačí vyšetřit případ, kdy čtvrtina kvádru leží v množině $x, y, z \geq 0$. Tato část je jednoznačně určena svým vrcholem (x, y, z), který leží v množině:

$$M: \quad (1-z)^2 = x^2 + 2y^2 \;\;\&\;\; 0 \leq x, y \;\;\&\;\; 0 \leq z \leq 1$$

objem této části je pak dán hodnotou

$$f(x, y, z) = xyz\ .$$

Hledáme tedy maximum f na M. Množina M je uzavřená (je to průnik uzavřených množin) a omezená (jak se snadno nahlédne). K použití věty o Langrangeových multiplikátorech potřebujeme ale množinu tvaru $\{a \in U \mid \Phi(a) = 0\}$, kde U je OTEVŘENÁ množina v $\mathbb{R}^3$. Množinu M proto rozdělíme na

$$M_1: \quad \underbrace{0 < x, y \;\&\; 0 < z < 1}_{=:U} \;\;\&\;\; \Phi(x, y, z) = 0$$

a

$$M_2: \quad (x = 0 \;\vee\; y = 0 \;\vee\; z = 0 \;\vee\; z = 1) \;\;\&\;\; 0 \leq x, y \;\;\&\;\; 0 \leq z \leq 1 \;\;\&\;\; \Phi(x, y, z) = 0$$

kde $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - (z-1)^2$ je vazbová funkce.

Pro body extrémů na M_1 můžeme teď použít Lagrangeovu podmínku (protože pro $a \in M_1$ je $\nabla\Phi(a) \neq (0, 0, 0)$, jak bude vidět). Tedy budeme tu mít $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$\Big(yz,\ xz,\ xy\Big) = \nabla f(a) = \lambda \cdot \nabla\Phi(a) = \lambda\Big(2x,\ 4y,\ 2(1-z)\Big)$$

a

$$(z-1)^2 = x^2 + 2y^2\ .$$

Protože na U jsou hodnoty x, y a $1 - z$ nenulové, můžeme vydělit první rovnici třetí rovnicí a také druhou rovnici opět třetí rovnicí:

$$\begin{array}{rcl} yz &=& \lambda 2x \\ xz &=& \lambda 4y \\ xy &=& \lambda 2(1-z) \\ (z-1)^2 &=& x^2 + 2y^2 \end{array} \quad \stackrel{\text{vydělení rovnic}}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} z(1-z) = x^2 \\ z(1-z) = 2y^2 \\ (z-1)^2 = x^2 + 2y^2 \end{array} \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad (z-1)^2 = z(1-z) + z(1-z) \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{c} x^2 = z(1-z) = \frac{2}{9} \\ y^2 = \frac{1}{2}z(1-z) = \frac{1}{9} \end{array} \quad \stackrel{x, y \geq 0}{\Longrightarrow} \quad \begin{array}{c} x = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{array}$$

Jediný podezřelý bod na M_1 je tedy $a = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ s hodnotou $f\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{27}$.

Na množině M_2 je funkce f konstantně nulová, takže celou M_2 můžeme zařadit mezi podezřelé body.

Porovnáním funkčních hodnot (a tím, že f nabývá extrémů na M), pak ihned máme, že kvádr s maximálním objemem je určen vrcholem $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (a jeho symetrickými protějšky na eliptickém kuželu).