8. cvičení z Matematické analýzy 2

10. - 14. dubna 2023

Připomenutí: Pro mocninné řady budeme využívat toho, že na vnitřku oboru konvergence příslušné řady platí:

- $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-x_0)^{n-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right)'$
- $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n}(x-x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$.

Jestliže mocninná řada konverguje na některém kraji oboru konvergence, pak je součet řady v tomto kraji (jednostranně) spojitý.

Dále budeme používat známé rozvoje:

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pro $|x| < 1$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ pro $x \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = \sin x$ pro $x \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Pro řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ platí

(i) řada konverguje $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$.

(ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} < 1 \quad \Rightarrow$ řada (absolutně) konverguje.

(iii) $\lim_{n\to\infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} > 1 \quad \Rightarrow$ řada diverguje.

8.1 Vyšetřete konvergenci mocninné řady a nalezněte její součet.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} x^{2n+3}$$

Řešení:

Poloměr konvergence: Využijeme podílové kritérium pro obecnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$: Pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{5^{n+2}} x^{2n+5}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{5^{n+1}} x^{2n+3}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{5} = \frac{x^2}{5}$$

Tedy řada konverguje pro $|x| < \sqrt{5}$ a diverguje pro $|x| > \sqrt{5}$, tudíž poloměr konvergence je $R = \sqrt{5}$. Pro $x = \pm\sqrt{5}$ máme, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}}(\pm\sqrt{5})^{2n+3} = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot (\pm\sqrt{5})$$

neexistuje. Tedy řada nekonverguje pro $x = \pm\sqrt{5}$.

Součet: Pro $|x| < \sqrt{5}$ je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{5^{n+1}} x^{2n+3} = \frac{x^3}{5} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1) \cdot \frac{x^2}{5} \right)^n = \frac{x^3}{5} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{-x^2}{5}\right)} = \frac{x^3}{x^2+5}$$

kde jsme využili součet $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n = \frac{1}{1-y}$ pro $y = -\frac{x^2}{5}$, $|y| < 1$.

Poznámka: Opačným postupem můžeme zase zjistit rozvoj funkce $\frac{x^3}{x^2+5}$ v bodě $x_0 = 0$.

8.2 Vyšetřete konvergenci mocninné řady a nalezněte její součet.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n n!} (x-2)^n$$

Řešení:

Střed řady je $x_0 = 2$.

Poloměr konvergence: Využijeme podílové kritérium. Pro $x \neq 2$ máme

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}(n+2)(x-2)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)!} \right| \cdot \left| \frac{3^n n!}{(-1)^n (n+1)(x-2)^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)\cdot|x-2|}{3(n+1)^2} = 0 < 1$$

Řada tedy konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, takže poloměr konvergence je $R = +\infty$.

Součet: Řadu si upravíme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n n!} (x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \left(-\frac{x-2}{3} \right)^n$$

Teď stačí jen sečíst řadu $f(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} y^n$ (která má také poloměr konvergence $R = +\infty$) a dosadit $y = \frac{2-x}{3}$. Z věty o derivování řad a využitím rozvoje e^y máme

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n!} y^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{n+1}}{n!} \right)' = \left(y \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right)' = (ye^y)' = e^y + ye^y = (1+y)e^y \; .$$

Tedy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3^n n!} (x-2)^n = f\left(\tfrac{2-x}{3}\right) = \tfrac{5-x}{3} \cdot e^{\frac{2-x}{3}}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

8.3 Vyšetřete konvergenci mocninné řady a nalezněte její součet.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} x^{n+1}$$

Řešení:

Poloměr konvergence: Využijeme podílové kritérium pro obecnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$: Pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{2^{n+1}(n+2)} x^{n+2}\right|}{\left|\frac{1}{2^n(n+1)} x^{n+1}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{2} \cdot \frac{n+1}{n+2} = \frac{|x|}{2}$$

Tedy řada konverguje pro $|x| < 2$ a diverguje pro $|x| > 2$, tudíž poloměr konvergence je $R = 2$. Pro $x = 2$ máme, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} 2^{n+1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$$

(je to známá harmonická řada). Divergence plyne např. ze srovnávacího kritéria s funkcí $\frac{1}{x}$.

Pro $x = -2$ řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} (-2)^{n+1} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

naopak konverguje (např. pomocí Abelova kritéria o monotonní posloupnosti a střídání znamének).

Součet: Pro $|x| < 2$ máme z věty o derivování řad a součtu geometrické řady, že pro $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} x^{n+1}$ je

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} x^{n+1} \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}$$

tedy

$$f(x) = \int \frac{1}{1 - \frac{x}{2}}\, dx = -2 \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right) + c$$

kde konstantu c určíme dosazením $x = 0$ do řady i do jejího součtu:

$$0 = f(0) = -2 \ln\left(1 - \frac{0}{2}\right) + c = c$$

Celkem tedy máme, že

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n(n+1)} x^{n+1} = -2 \ln\left(1 - \frac{x}{2}\right)$$

platí pro $|x| < 2$. Pro $x = -2$ řada konverguje a její součet je tedy zprava spojitá funkce v $x = -2$. I pravá strana rovnosti je zprava spojitá funkce v bodě $x = -2$. Takže rovnost platí i v bodě $x = -2$. Speciálně tedy máme, že

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = -2 \ln 2\ .$$

8.4 Vyšetřete konvergenci mocninné řady a nalezněte její součet.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n} x^n$$

Řešení:

Poloměr konvergence: Využijeme podílové kritérium. Pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(n+1)^2-1}{n+1} x^{n+1}\right|}{\left|\frac{n^2-1}{n} x^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2-1}{n^2-1} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot |x| = |x|$$

Tedy řada konverguje pro $|x| < 1$ a diverguje pro $|x| > 1$, tudíž poloměr konvergence je $R = 1$.

Pro $x = \pm 1$ není splněna nutná podmínka konvergence řady (tedy, že limita sčítanců musí být nula), takže zde řada diverguje.

Součet: Řadu rozepíšeme pomocí součtu dvou řad, obě mají poloměr konvergence 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n - \frac{1}{n} x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Pro součet první řady použijeme známou geometrickou řadu a její derivování:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n \right)' = \left(\frac{1}{1-x} - 1 \right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$$

A pro součet druhé řady uděláme podobnou věc, jen obráceně:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} \qquad \Rightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x = -\ln(1-x) + C \ .$$

Pro $x = 0$ dostaneme, že $0 = -\ln(1) + C$, tedy $C = 0$.

Takže po dosazení dostaneme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n} x^n = \cdots = \frac{x}{(1-x)^2} + \ln(1-x) \ .$$

8.5 Nalezněte rozvoj funkce $f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2}$ do mocninné řady v okolí bodu $x_0 = 0$.

Řešení:

Použijeme rozvoj $\frac{1}{1-y}$ v okolí 0 a její derivaci.

Pro $|y| < 1$ máme

$$\frac{1}{(1-y)^2} = \left(\frac{1}{1-y} \right)' = \left(\sum_{n=0}^{\infty} y^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n y^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) y^n \ .$$

Funkci f teď upravíme:

$$f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{1}{(1-(-2x))^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(-2)^n x^n$$

Tato rovnost platí pro $|-2x| < 1$, tedy $|x| < \frac{1}{2}$. Naopak pro $1 < |y| = |-2x|$ řada výše diverguje. Tedy poloměr konvergence rozvoje je $R = \frac{1}{2}$ a rozvoj tedy nejde už dále roztahovat. V krajích řada diverguje, tedy ani tam rovnost neplatí.

8.6 Nalezněte rozvoj funkce $f(x) = \frac{3x-5}{x^2-2x-3}$ do mocninné řady v okolí bodu $x_0 = 2$.

Řešení:
Funkci si nejdříve převedeme na jednodušší tvar pomocí parciálních zlomků, které upravíme, abychom mohli využít rozvoj funkce $\frac{1}{1-y}$ v bode 0 pro $y = x - 2$.

$$f(x) = \frac{3x-5}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{1}{x-3} = \frac{2}{3+(x-2)} + \frac{1}{(x-2)-1} =$$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x-2}{3})} - \frac{1}{1-(x-2)}$$

Nyní dosadíme do rozvoje $\frac{1}{1-y} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n$, pro $|y| < 1$, pomocí $y_1 = -\frac{x-2}{3}$ a $y_2 = x - 2$. To můžeme udělat pokud $\left|\frac{x-2}{3}\right| < 1$ a $\left|x-2\right| < 1$ neboli $|x-2| < \min\{3, 1\} = 1$. Pak je

$$f(x) = \cdots = \frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x-2}{3}\right)^n - \sum_{n=0}^{\infty}(x-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2(-1)^n}{3^{n+1}} - 1\right)(x-2)^n$$

Z toho, že pro $1 < |x-2| < 3$ první řada (z dosazení za y_1) konverguje a druhá řada (z dosazení za y_2) diverguje plyne, že i jejich lineární kombinace (tedy výsledná řada) diverguje. Tedy poloměr konvergence výsledné řady je $R = 1$ (a v bodech $x - 2 = \pm 1$ opět diverguje).

8.7 Nalezněte rozvoj funkce $f(x) = \cos^2(2x)$ do mocninné řady v okolí bodu $x_0 = 0$.

Řešení:
Použijeme vzorec $\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2}$ a rozvoj $\cos y = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}$ pro všechna $y \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2(2x) = \frac{1+\cos(4x)}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(4x)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-16)^n}{(2n)! \cdot 2}\, x^{2n}$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Fubiniho věta: Nechť

- $E \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace (tj. množina, na které má vůbec smysl se o integrál nějaké funkce zajímat, např. určená grafy nějakých spojitých funkcí),
- $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na vnitřku E° oblasti E a
- dvojný integrál z absolutní hodnoty funkce f je konečný, tj. $\iint\limits_E |f|\, dS < \infty$ (např. pokud funkce je omezená a oblast E je také omezená).

Pak existuje dvojný integrál $\iint\limits_E f\ dS$ a platí

$$\iint\limits_E f\ dS = \int\limits_{\pi_2(E)} \left(\int\limits_{\substack{\text{(vodorovný) řez množinou } E \\ \text{pomocí přímky } \mathbb{R}\times\{y\}}} f(x,y)\ dx \right) dy$$

$$\iint\limits_E f\ dS = \int\limits_{\pi_1(E)} \left(\int\limits_{\substack{\text{(svislý) řez množinou } E \\ \text{pomocí přímky } \{x\}\times\mathbb{R}}} f(x,y)\ dy \right) dx,$$

kde $\pi_1, \pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jsou projekce na jednotlivé osy, tedy $\pi_1(x,y) = x$ a $\pi_2(x,y) = y$.

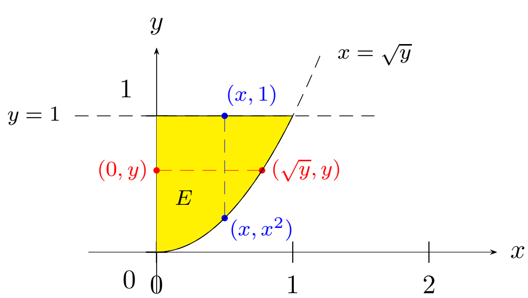
8.8 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Změňte pořadí integrace následujících integrálů:

(i) $\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy.$

(ii) $\int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx.$

Řešení:
(a) Základní oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad 0 \le x \le \sqrt{y}.$$



Po rozřezání oblasti E ve směru osy y máme

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x^2 \le y \le 1.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int\limits_0^1 \int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \int\limits_{x^2}^1 f(x,y)\ dy\ dx.$$

(b) Základní oblast integrace je

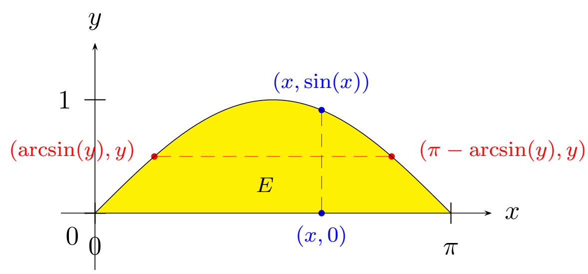
$$E: \quad 0 \le x \le \pi \quad \& \quad 0 \le y \le \sin x.$$

Máme

$$\pi_1(E) = \langle 0, \pi \rangle$$

a

$$(\{x\} \times \mathbb{R}) \cap E = \{x\} \times \langle 0, \sin x \rangle.$$



Po výměně pořadí integrace máme

$$\pi_2(E) = \langle 0, 1 \rangle$$

a pro řezy ve směru osy x z nerovnosti $y \leq \sin x$ odvodíme:

$$\arcsin y \leq \arcsin(\sin x) = \begin{cases} x & , \ x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \\ \pi - x & , \ x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle \end{cases}$$

Pozor! arcsin a sin jsou vůči sobě inverzní jen pro úhly v intervalu $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$. Využijeme tudíž $\sin x = \sin(\pi - x)$ a pro $x \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ už je $\pi - x \in \langle -\frac{\pi}{2}, 0 \rangle$, takže

$$\arcsin(\sin x) = \arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x.$$

Takže dostáváme $\arcsin y \leq x \leq \pi - \arcsin y$, tudíž

$$(\mathbb{R} \times \{y\}) \cap E = \langle \arcsin y, \pi - \arcsin y \rangle \times \{y\}.$$

Záměna integrace pak vyjde jako:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f(x, y) \ dy \ dx = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi - \arcsin y} f(x, y) \ dx \ dy.$$