9. cvičení z Matematické analýzy 2

17. - 21. dubna 2023

9.1 (dvojný integrál - Fubiniho věta)
Záměnou pořadí integrace vypočtěte

(a)

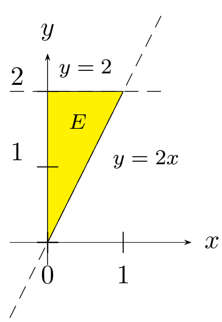
$$\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2}\, dy\, dx$$

(b)

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos\sqrt{x^3}\, dx\, dy$$

Řešení:
(a) Vzhledem k funkci bude rozumnější zkusit integraci vzhledem k x. Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad 2x \le y \le 2\ .$$



Tedy

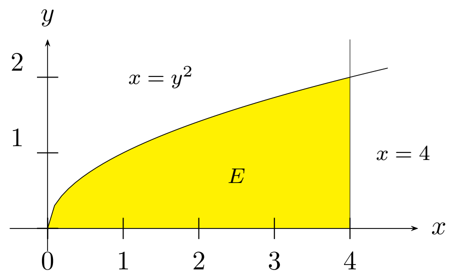
$$E: \quad 0 \le y \le 2 \quad \& \quad 0 \le x \le \frac{y}{2}\ .$$

Máme

$$\int_0^1 \int_{2x}^2 4e^{y^2}\ dy\ dx = \int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} 4e^{y^2}\ dx\ dy = \int_0^2 2ye^{y^2}\ dy = \left[e^{y^2}\right]_0^2 = e^4 - 1.$$

(b) Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle y.
Oblast integrace je

$$E: \quad 0 \le y \le 2 \quad \& \quad y^2 \le x \le 4\ .$$



Tedy

$$E: \quad 0 \le x \le 4 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{x}\ .$$

Máme

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos\sqrt{x^3}\,dx\ dy = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} \cos\sqrt{x^3}\ dy\ dx = \int_0^4 x^{\frac{1}{2}} \cos x^{\frac{3}{2}}\ dx = \left[\frac{2}{3}\sin x^{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \frac{2}{3}\sin 8.$$

9.2 Vypočtete

$$\int_M |y - \sin x|\,dx\ dy$$

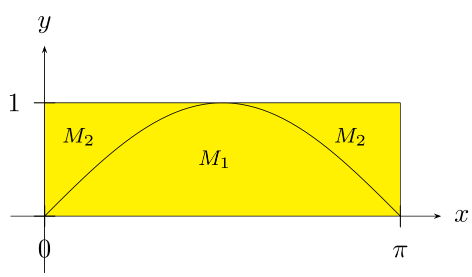
kde $M = [0,\pi] \times [0,1]$.

Řešení:

Vzhledem k funkci rozdělíme M podle toho, jak vypadá vnitřek absolutní hodnoty, tj. kde je $y - \sin x \ge 0$ a kde je $y - \sin x < 0$.

$$M_1: \quad 0 \le x \le \pi \quad \& \quad 0 \le y \le \sin x\ .$$

$$M_2: \quad 0 \le x \le \pi \quad \& \quad \sin x \le y \le 1\ .$$



$$\int_M |y-\sin x|\,dx\ dy = \int_{M_1} |y-\sin x|\,dx\ dy + \int_{M_2} |y-\sin x|\,dx\ dy =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{\sin x} \sin x - y\ dy\ dx + \int\limits_0^{\pi} \int\limits_{\sin x}^{1} y - \sin x\ dy\ dx = \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x - \frac{\sin^2 x}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sin^2 x}{2} - \sin x + \sin^2 x\ dx =$$

$$= \int\limits_0^{\pi} \sin^2 x + \frac{1}{2} - \sin x\ dx = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 2 = \pi - 2.$$

Věta o substituci: Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^2$ je oblast integrace a $\Phi : U \to \mathbb{R}^2$ je zobrazení (nazývané *parametrizace*). Nechť dále platí, že

- Φ je spojité na U,
- Φ je prosté a spojitě diferencovatelné na U° (tj. na vnitřku U)
- $\det(\mathrm{d}\Phi) \neq 0$ všude na U° a
- množina ∂U se skládá ze spojitě diferencovatelných křivek, případně bodů (tj. její příspěvek k hodnotě jakéhokoliv integrálu je nulový)

Nechť f je integrabilní funkce na $\Phi(U)$. Pak

$$\iint\limits_{\Phi(U)} f(x,y)\ dx\ dy = \iint\limits_U (f \circ \Phi)(\alpha,\beta) \cdot |\det(\mathrm{d}\Phi(\alpha,\beta))|\ d\alpha\ d\beta.$$

9.3 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)

Vyjádřete integrál

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)\,dx\ dy$$

v polárních souřadnicích se středem v počátku

(a) v pořadí $dr\ d\varphi$,

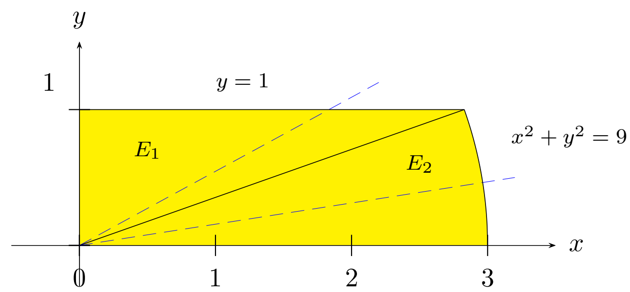
(b) v pořadí $d\varphi\ dr$.

Řešení:
Oblast

$$E: \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le \sqrt{9-y^2}$$

je část kruhu $x^2+y^2 \le 9$.

(a)



Oblast E je potřeba rozdělit na dvě části E_1 a E_2 podle předpisu hraničních křivek - jedna je $x^2 + y^2 = 9$ a druhá $y = 1$. Pro parametrizaci v pořadí $dr\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné r.

Oblast E_1 má parametrizaci

$$U_1 : \quad 0 \le \varphi \le \arcsin \frac{1}{3} \quad \& \quad 0 \le r \le 3\ .$$

Oblast E_2 má poloměr shora ohraničený přímkou $y = 1$ Po dosazení .$x = r \cos\varphi$ a $y = r \sin\varphi$ do této rovnice pak máme omezení proměnné r shora pomocí

$$r \sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sin r}$$

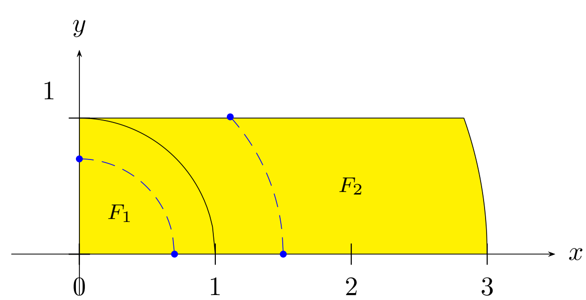
Parametrizace U_2 oblasti E_2 je

$$U_2 : \quad \arcsin \frac{1}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \quad \& \quad 0 \le r \le \frac{1}{\sin r}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\int\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^{\arcsin \frac{1}{3}} \int\limits_0^{3} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ dr\ d\varphi + \int\limits_{\arcsin \frac{1}{3}}^{\pi/2} \int\limits_0^{\frac{1}{\sin r}} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ dr\ d\varphi.$$

(b) Oblast E budeme řezat podle kružnic se středem v počátku souřadnic. Je tedy potřeba E rozdělit na dvě části F_1 a F_2 podle toho, kde budou oblouky kružnic mít hraniční body - jedny budou končit na $x = 0$ a druhé na $y = 1$.



Pro F_1 máme parametrizaci

$$V_1: \quad 0 \le r \le 1 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\ .$$

Pro F_2 je omezení proměnné φ shora dáno pomocí

$$r \sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\frac{1}{r}$$

Parametrizace F_2 je tedy

$$V_2: \quad 1 \le r \le 3 \quad \& \quad 0 \le \varphi \le \arcsin\frac{1}{r}\ .$$

Takže přepis integrálu je následující

$$\int\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{\pi/2} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ d\varphi\ dr + \int\limits_1^3 \int\limits_0^{\arcsin\frac{1}{r}} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ d\varphi\ dr\ .$$

9.4 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)

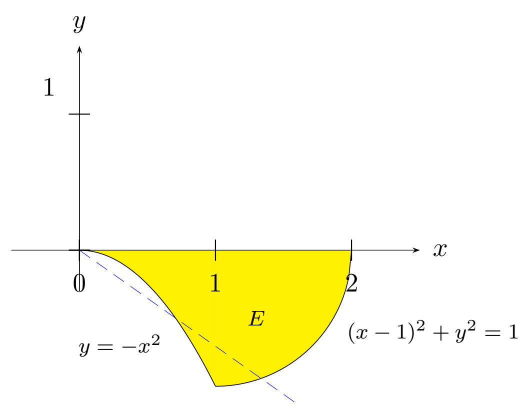
Vyjádřete integrál

$$I = \int_0^1 \int_{-x^2}^0 f(x,y)\, dy\ dx + \int_1^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^0 f(x,y)\, dy\ dx$$

v polárních souřadnicích se středem v počátku v pořadí $dr\ d\varphi$.

Řešení:

Křivka $y = -\sqrt{2x - x^2}$ po úpravě dává $y^2 + x^2 - 2x = 0$ neboli $(x-1)^2 + y^2 = 1$.



Pro parametrizaci v pořadí $dr\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné r.

Oblast E má poloměr zdola ohraničený křivkou $y = -x^2$ a shora křivkou $x^2 + y^2 = 2x$. Po dosazení .$x = r\cos\varphi$ a $y = r\sin\varphi$ máme

$$r\sin\varphi = y = -x^2 = -r^2\cos^2\varphi \quad \Rightarrow \quad r = -\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = 2x = 2r\cos\varphi \qquad \Rightarrow \qquad r = 2\cos\varphi$$

Parametrizace U oblasti E je

$$U: \qquad -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq 0 \qquad \& \qquad -\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \leq r \leq 2\cos\varphi$$

takže přepis integrálu je následující

$$\int_E f(x,y)\ dx\ dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \int_{-\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}}^{2\cos\varphi} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ dr\ d\varphi.$$

9.5 (vyjádření oblasti v polárních souřadnicích)
Vyjádřete integrál

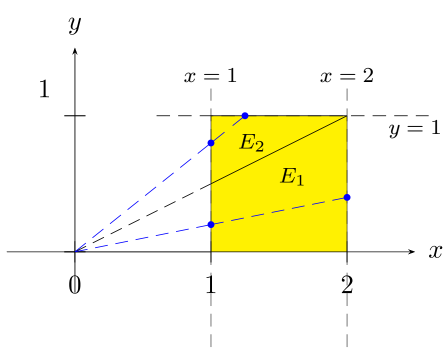
$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy$$

kde $E = [1,2] \times [0,1]$ v polárních souřadnicích se středem v počátku

(a) v pořadí $dr\ d\varphi$,

(b) v pořadí $d\varphi\ dr$.

Řešení:
(a) Pro parametrizaci oblasti E v polárních souřadnicích v pořadí $dr\ d\varphi$ určíme nejdříve rozsah proměnné φ. Pro pevně zvolené φ pak určíme rozsah proměnné r. Množina E je čtverec.



Proměnná r pak běží od jedné hranice čtverce $x = 1$ až po druhou hranici, která je ale určena různými předpisy $x = 2$ nebo $y = 1$ v závislosti na volbě úhlu φ. Proto je potřeba E rozdělit na dvě oblasti E_1 a E_2 a každou vyjádřit zvlášť.

Oblast E_1 má rozsah úhlu $0 \leq \varphi \leq \mathrm{arctg}(\frac{1}{2})$. Spodní hranice proměnné r je určena přímkou $x = 1$ a horní hranice přímkou $x = 2$. Po dosazení polárních souřadnic pak máme

$$r \cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$r \cos\varphi = x = 2 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{2}{\cos\varphi}$$

Parametrizace U_1 oblasti E_1 v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U_1 : \quad 0 \leq \varphi \leq \mathrm{arctg}(\tfrac{1}{2}) \quad \& \quad \frac{1}{\cos\varphi} \leq r \leq \frac{2}{\cos\varphi}$$

Oblast E_2 vyjádříme podobně. Rozsah úhlu je $\mathrm{arctg}(\frac{1}{2}) \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Spodní hranice proměnné r je určena opět přímkou $x = 1$ a horní hranice přímkou $y = 1$.

$$r \cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$r \sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{\sin\varphi} \; .$$

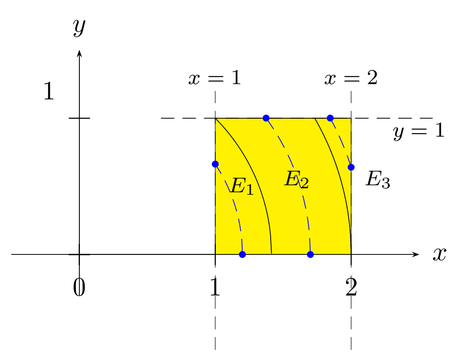
Parametrizace U_2 oblasti E_2 v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$U_2 : \quad \leq \mathrm{arctg}(\tfrac{1}{2}) \leq \varphi \leq \tfrac{\pi}{4} \quad \& \quad \frac{1}{\cos\varphi} \leq r \leq \frac{1}{\sin\varphi}$$

takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\; dx\; dy = \int\limits_0^{\mathrm{arctg}(\frac{1}{2})} \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{2}{\cos\varphi}} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\; dr\; d\varphi + \int\limits_{\mathrm{arctg}(\frac{1}{2})}^{\pi/4} \int\limits_{\frac{1}{\cos\varphi}}^{\frac{1}{\sin\varphi}} r \cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\; dr\; d\varphi \; .$$

(b) Oblast E budeme řezat podle kružnic se středem v počátku souřadnic. Proto je potřeba E rozdělit na tři oblasti F_1, F_2 a F_3 podle toho, které hranice čtverce kružnice protínají. Oblastem pak odpovídají oblasti V_1, V_2 a V_3 v polárních souřadnicích.



Oblast F_1 má rozsah poloměru $1 \leq r \leq \sqrt{1^2+1^2}$. Spodní hranice proměnné φ je určena přímkou $y=0$ a horní hranice přímkou $x=1$. Po dosazení polárních souřadnic pak máme

$$r\cos\varphi = x = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\tfrac{1}{r}$$

Parametrizace V_1 oblasti F_1 v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$V_1: \quad 1 \leq r \leq \sqrt{2} \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \arccos\tfrac{1}{r}$$

Oblast F_2 vyjádříme podobně. Rozsah poloměru je $\sqrt{1^2+1^2} \leq r \leq \sqrt{0^2+2^2}$. Spodní hranice proměnné φ je určena opět přímkou $y=0$ a horní hranice přímkou $y=1$.

$$r\sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\tfrac{1}{r}\ .$$

Parametrizace V_2 oblasti F_2 v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$V_2: \quad \sqrt{2} \leq r \leq 2 \quad \& \quad 0 \leq \varphi \leq \arcsin\tfrac{1}{r}$$

Pro oblast F_3 je rozsah poloměru $\sqrt{0^2+2^2} \leq r \leq \sqrt{1^2+2^2}$. Spodní hranice proměnné φ je určena přímkou $x=2$ a horní hranice přímkou $y=1$.

$$r\cos\varphi = x = 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arccos\tfrac{2}{r}\ .$$

$$r\sin\varphi = y = 1 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arcsin\tfrac{1}{r}\ .$$

Parametrizace V_3 oblasti F_3 v polárních souřadnicích je tak dána jako

$$V_3: \quad 2 \leq r \leq \sqrt{5} \quad \& \quad \arccos\tfrac{2}{r} \leq \varphi \leq \arcsin\tfrac{1}{r}$$

Takže přepis integrálu je následující

$$\iint\limits_E f(x,y)\ dx\ dy = \int\limits_1^{\sqrt{2}} \int\limits_0^{\arccos\frac{1}{r}} r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ d\varphi\ dr +$$

$$+\int\limits_{\sqrt{2}}^{2} \int\limits_0^{\arcsin\frac{1}{r}} r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ d\varphi\ dr\ + \int\limits_2^{\sqrt{5}} \int\limits_{\arccos\frac{2}{r}}^{\arcsin\frac{1}{r}} r\cdot f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\ d\varphi\ dr\ .$$

9.6 (polární souřadnice)

Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int\limits_{-2}^{2} \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\ dx,$$

(b)

$$\int\limits_0^{1} \int\limits_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ dx$$

Řešení:

Polární souřadnice je vhodné používat vzhledem když množina a/nebo funkce vykazují rotační symetrii. Je to transformace s předpisem

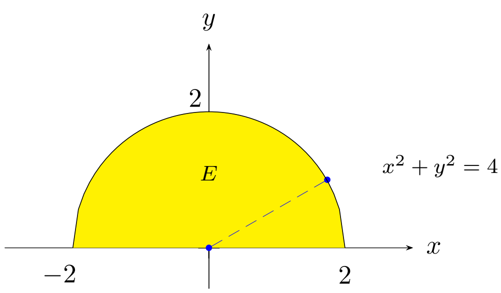
$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi \\ y & = & r\sin\varphi \end{array}$$

jejíž jakobián je $\det \Phi' = r$.

(a) Oblast integrace je

$$E : \quad -2 \le x \le 2 \quad \& \quad 0 \le y \le \sqrt{4 - x^2}$$

což je půlkruh o poloměru 2 v horní polorovině a se středem v počátku.



Jeho parametrizace $E = \Phi(U)$ pomocí polárních souřadnic Φ je tvaru

$$U : \quad 0 \le \varphi \le \pi \quad \& \quad 0 \le r \le 2 \ .$$

takže máme

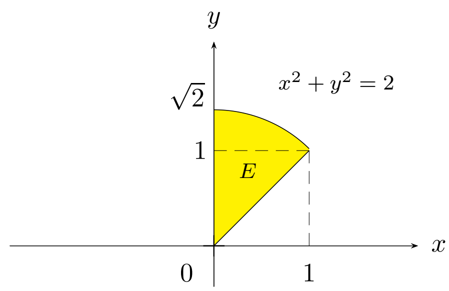
$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dy \, dx = \iint_{E=\Phi(U)} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \, dS = \iint_{U} r^2 (\underbrace{\cos^2\varphi - \sin^2\varphi}_{=\cos 2\varphi}) \, dr \, d\varphi =$$

$$= \left(\int_0^2 r^2 \, dr \right) \cdot \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \cos 2\varphi \, d\varphi \right)}_{=0} = 0 \ .$$

(b) Oblast integrace je

$$E : \quad 0 \le x \le 1 \quad \& \quad x \le y \le \sqrt{2 - x^2}$$

což je kruhová výseč.



Její parametrizace $E = \Psi(U)$ ve sférických souřadnicích je tvaru

$$U: \quad 0 \le r \le \sqrt{2} \quad \& \quad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \ .$$

Takže máme

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ dy \ dx = \iint_{E=\Psi(U)} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \ dS = \iint_U r\cos\varphi \ dr \ d\varphi =$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi \ dr \ d\varphi = \left(\int_0^{\sqrt{2}} r \ dr \right) \cdot \left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \ d\varphi \right) = 1 \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Poznámka: Použili jsme vztah

$$\iint_{X\times Y} f(x)g(y) \ dV = \Big(\int_X f(x) \ dx \Big) \cdot \Big(\int_Y g(y) \ dy \Big)$$

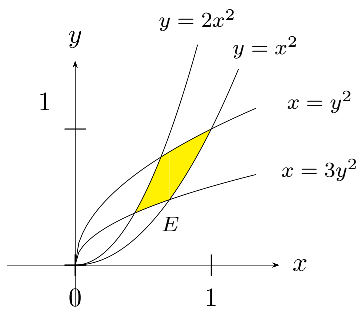
pro integrabilní funkce $f: X \to \mathbb{R}$ a $g: Y \to \mathbb{R}$.

9.7 S použitím substituce určete

$$\int_E \frac{1}{x^2y^2} \, dx \ dy$$

kde E je ohraničena křivkami $y = x^2$, $y = 2x^2$, $x = y^2$ a $x = 3y^2$.

Řešení:
Oblast E zjistíme z náčrtu:



Je to tedy

$$E: \quad x^2 \leq y \leq 2x^2, \quad y^2 \leq x \leq 3y^2, \quad x, y > 0$$

což ještě přepíšeme jako

$$E: \quad 1 \leq \frac{y}{x^2} \leq 2, \quad 1 \leq \frac{x}{y^2} \leq 3, \quad x, y > 0 \; .$$

Vzhledem k tvaru množiny se nabízí použít substituci Ψ, kterou zadáme pomocí její inverze:

$$\Psi^{-1}: \quad \begin{aligned} u &= \tfrac{y}{x^2} \\ v &= \tfrac{x}{y^2} \end{aligned}$$

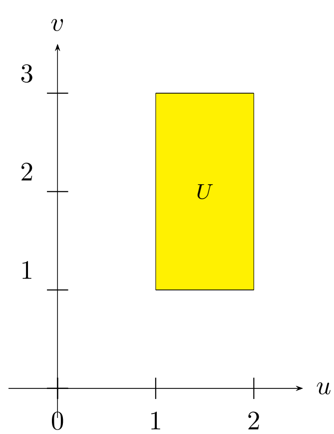
Množina

$$U: \quad 1 \leq u \leq 2 \quad \& \quad 1 \leq v \leq 3 \; .$$

zřejmě parametrizuje E jako $E = \Psi(U)$.

Substituci Ψ si vyjádříme explicitně jako

$$\Psi: \quad \begin{aligned} x &= u^{-\frac{2}{3}} v^{-\frac{1}{3}} \\ y &= u^{-\frac{1}{3}} v^{-\frac{2}{3}} \end{aligned}$$



Pro jakobián máme

$$J_\Phi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}u^{-\frac{5}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{-\frac{2}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ -\frac{1}{3}u^{-\frac{4}{3}}v^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{-\frac{5}{3}} \end{pmatrix}$$

$$\det(J_\Phi(u,v)) = \frac{4}{9}u^{-2}v^{-2} - \frac{1}{9}u^{-2}v^{-2} = \frac{1}{3u^2v^2}.$$

Po substituci pak máme

$$\int\limits_E \frac{1}{x^2y^2}\,dx\,dy = \int\limits_U u^2v^2 \cdot \frac{1}{3u^2v^2}\,du\,dv = \int_1^2\int_1^3 \frac{1}{3}\,du\,dv = \frac{2}{3}\ .$$

9.8 (lineární substituce)

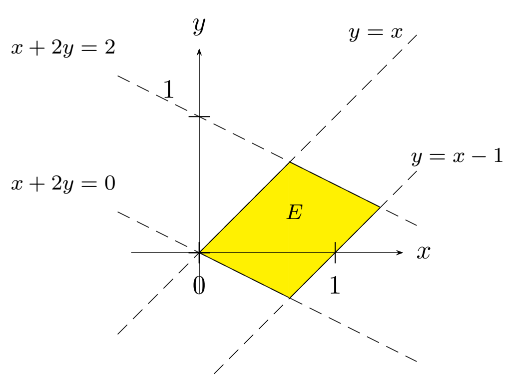
S použitím substituce určete

$$\iint\limits_E (x+2y)\sqrt[3]{x-y}\,dA$$

kde E je omezená oblast určená křivkami $y=x$, $y=x-1$, $x+2y=0$, $x+2y=2$.

Řešení:

Oblast E zjistíme z náčrtu:



Je to tedy

$$E: \quad x-1 \le y \le x, \qquad 0 \le x+2y \le 2$$

což ještě přepíšeme jako

$$E: \quad 0 \le x-y \le 1, \qquad 0 \le x+2y \le 2\ .$$

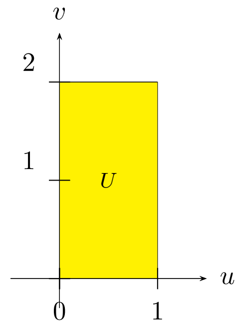
Vzhledem k tvaru množiny i funkce se nabízí použít (lineární) substituci Ψ, kterou zadáme pomocí její inverze:

$$\Psi^{-1}: \quad \begin{array}{rcl} u &=& x-y \\ v &=& x+2y \end{array}$$

Množina

$$U: \quad 0 \le u \le 1 \quad \& \quad 0 \le v \le 2\ .$$

zřejmě parametrizuje E jako $E = \Psi(U)$.



Pro jakobián máme

$$\det(\mathrm{d}\Psi) = \frac{1}{\det\Big(\mathrm{d}(\Psi^{-1})\Big)} = \frac{1}{\det\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)} = \frac{1}{3}\ .$$

Po substituci pak máme

$$\iint\limits_{E=\Psi(U)} (x+2y)\sqrt[3]{x-y}\, dA = \iint\limits_{U} v\sqrt[3]{u}\cdot\frac{1}{3}\, du\ dv = \frac{1}{3}\int\limits_0^2\int\limits_0^1 v\sqrt[3]{u}\ du\ dv =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\int\limits_0^2 v\ dv\right)\cdot\left(\int\limits_0^1 \sqrt[3]{u}\ du\right) = \frac{1}{3}\cdot 2\cdot\left[\frac{3}{4}u^{4/3}\right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{2}.$$

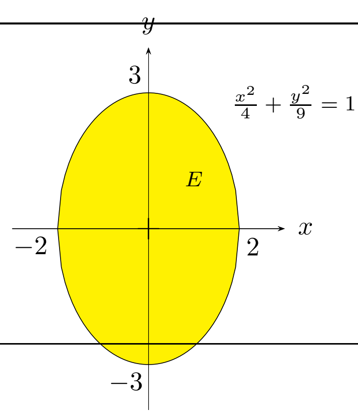
9.9 (obecnější transformace)
Spočítejte integrál

$$\iint\limits_E \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)}\, dx\ dy,$$

kde

$$E:\quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\le 1\ .$$

Řešení:



Vzhledem ke tvaru množiny i funkce, kde se vyskytuje výraz $\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{3}\right)^2$, zde budeme používat upravenou transformaci pomocí eliptických souřadnic

$$\Phi : \quad \begin{aligned} \tfrac{x}{2} &= r\cos\varphi \\ \tfrac{y}{3} &= r\sin\varphi \end{aligned}$$

které vzniknou složením polárních souřadnic Ψ a lineární transformace $\mathcal{L}$, která deformuje jednotlivé osy:

$$\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi, \qquad \mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}) = (2\tilde{x}, 3\tilde{y}).$$

Máme tedy

$$d\Phi = d\mathcal{L}_{|\Psi} \circ d\Psi \quad \text{a} \quad \det d\Phi = (\det d\mathcal{L}_{|\Psi}) \cdot (\det d\Psi) = 6 \cdot r,$$

protože

$$d\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Oblast U parametrizující E pomocí souřadnic $\Phi = \mathcal{L} \circ \Psi$ je tedy

$$U : \quad 0 \le \varphi \le 2\pi \quad \& \quad 0 \le r \le 1$$

protože $\Psi(U)$ je kruh $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \le 1$, který $\mathcal{L}$ převede na E. Takže máme

$$\iint\limits_{E=\Phi(U)} \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)}\, dx\ dy = \iint\limits_{U} 6r\sqrt{1-r^2}\, dr\ d\varphi = 6 \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\ dr\ d\varphi =$$

$$= \left(\int\limits_0^{2\pi} 6\ d\varphi\right) \cdot \left(\int\limits_0^1 r\sqrt{1-r^2}\ dr\right) = 12\pi \left[-\frac{(1-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^1 = 4\pi\ .$$