12. cvičení z Matematické analýzy 2

11. - 15. prosince 2023

12.1 (sférické souřadnice)
Spočítejte

$$\iiint_E x^2 z \; dV$$

kde

$$E: \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \quad \& \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Řešení: zde.

12.2 (parametrizace křivky)
Nalezněte parametrizaci křivky, která vznikne průnikem válce $x^2 + y^2 = 16$ a roviny $z = x + y$.

Řešení: zde.

12.3 (délka křivky)
Určete délku asteroidy $\mathcal{C}: \quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$, s parametrizaci

$$\varphi: \quad x = \cos^3 t \;\; \& \;\; y = \sin^3 t \;\; \& \;\; 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Řešení: zde.

12.4 (křivkový integrál z funkce)
Spočítejte $\int_{\mathcal{C}} f\,ds$, kde $f(x, y, z) = xe^{yz}$ a $\mathcal{C}$ je úsečka vedoucí z bodu $A = (0, 0, 0)$ do bodu $B = (1, 2, 3)$.

Řešení: zde.

12.5 (křivkový integrál z funkce)
Spočítejte $\int_{\mathcal{C}} \sqrt{x^2 + y^2}\,ds$, kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: horní polovina kružnice o poloměru $\frac{1}{2}$ se středem v $(\frac{1}{2}, 0)$ jdoucí v kladném smyslu z bodu $(1, 0)$ do bodu $(0, 0)$;
- $\mathcal{C}_2$: úsečka jdoucí z bodu $(0, 0)$ do bodu $(-1, 2)$.

Řešení: zde.

12.6 (křivkový integrál z funkce)
Spočítejte $\int_{\mathcal{C}}(x + y)\,ds$, kde $\mathcal{C}$ se skládá postupně z křivek

- $\mathcal{C}_1$: levá polovina kružnice o poloměru 1 se středem v $(0, 1)$ jdoucí v záporném smyslu z bodu $(0, 0)$ do bodu $(0, 2)$;
- $\mathcal{C}_2$: úsečka jdoucí z bodu $(0, 2)$ do bodu $(1, 0)$.

Řešení: zde.

12.7 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int_{\mathcal{C}} 2xy\ dx - x^2\ dy$$

kde $\mathcal{C}$ je část paraboly $x = 2y^2$ jdoucí z bodu $(0,0)$ do bodu $(2,1)$.

Řešení: zde.

12.8 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz$$

kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = z^2 \quad \& \quad x^2 + y^2 = 2x \quad \& \quad z \geq 0$$

je křivka s orientací v kladném smyslu při pohledu shora.

Řešení: zde.

12.9 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int_{\mathcal{C}} y\ dx + z\ dy + x\ dz$$

kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 = 1 \quad \& \quad x + z = 1$$

je křivka s kladnou orientací při pohledu shora.

Řešení: zde.

12.10 (křivkový integrál z vektorového pole)
Určete

$$\int_{\mathcal{C}} (y^2 + 1)\ dx + 2z\ dy + x^2\ dz$$

kde

$$\mathcal{C}: \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \& \quad x = y \quad \& \quad z \geq 0$$

je křivka s orientací od bodu $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ do bodu $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$.

Řešení: zde.

12.11 (konzervativní pole, potenciál)
Určete hodnotu parametru α tak, aby následující pole byla konzervativní. Najděte jejich potenciál a hodnotu práce síly z bodu A do B v tomto případě.

(a) $\vec{F}(x,y,z) = (x^2 + y, \quad y^2 + \alpha x, \quad ze^z)$, $A = (0,1,0)$, $B = (-1,1,0)$.

(b) $\vec{F}(x,y,z) = (y + z, \quad x + z, \quad x + \alpha y)$, $A = (0,0,0)$, $B = (1,1,1)$.

Řešení: zde.

12.12 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál z vektorového pole

$$\vec{F} = (xy^2 + \sin(x^2),\ 2x^2y + e^{-y^2})$$

podél kladně orientované hranice $\mathcal{C}$ trojúhelníku M s vrcholy $(0,0)$, $(2,2)$ a $(2,4)$.

Řešení: Podobně jako zde.