13. cvičení z Matematické analýzy 2

18. - 22. prosince 2023

13.1 (konzervativní pole, potenciál)
Určete hodnotu parametru α tak, aby pole

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{\alpha}{z}, \quad -\frac{3}{z}, \quad \frac{3y-x}{z^2} \right)$$

bylo konzervativní. Najděte jeho potenciál a hodnotu práce síly z bodu $A = (1,0,1)$ do $B = (-1,1,2)$ v tomto případě.

Řešení: zde.

13.2 (Greenova věta)
Použijte Greenovu větu k nalezení práce síly

$$\vec{F} = \left(2xy^3 + \operatorname{arctg}(x^2), \quad 4x^2y^2 - e^{-y^2} \right)$$

vykonané na částici podél křivky $\mathcal{C}$, která je hranicí oblasti M ohraničené křivkami $y = 0$, $x = 1$ a $y = x^3$ v prvním kvadrantu. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček).

Řešení: zde.

13.3 (obsah plochy)
Spočítejte obsah plochy M

(a) na polosféře $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ vymezené válcem $x^2 + y^2 \leq x$.

(b) na paraboloidu $z = x^2 + y^2$ vymezené $z \leq 1$.

Řešení: zde.

13.4 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

(a)
$$\iint_M z^2 \, dS,$$
kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 1$ mezi rovinami $z = 0$ a $z = x + 1$.

(b)
$$\iint_M z \, dS,$$
kde M je částí válce $x^2 + y^2 = 2$ vymezená rovinou $z = 0$ a plochou $z = x^2 + (y-1)^2$.

Řešení: zde.

13.5 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

$$\iint_M (x^2 + y^2)z \; dS,$$

kde M je povrch polokoule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$.

Řešení: zde.

13.6 (plošný integrál z funkce)
Spočítejte

$$\iint_M z^2 \; dS,$$

kde M je část povrchu koule $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x, y, z \geq 0$.

Řešení: zde.

13.7 (plošný integrál z vektorového pole - tok)
Spočítejte

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde

(a) $\vec{F}(x, y, z) = (-x,\ -y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

(b) $\vec{F}(x, y, z) = (x,\ -z,\ y)$ a M je částí sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ v 1. oktantu s orientací směrem do počátku.

Řešení: zde.

13.8 (plošný integrál z vektorového pole - tok)
Spočítejte

$$\iint_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (x,\ y^2,\ yz)$ a M je na plášti kuželu $x^2 + y^2 = (z - 1)^2$ pro $0 \leq z \leq 1$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení: zde.