14. cvičení z Matematické analýzy 2

8. - 12. ledna 2024

13.1 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte

$$\int_{\mathcal{C}} (3y - e^{\sin x})\, dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})\, dy$$

kde $\mathcal{C}$ je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

Řešení: zde.

13.2 (Greenova věta)

Pomocí Greenovy věty spočítejte obsah plochy v $\mathbb{R}^2$ omezené

(a) cykloidou $\varphi(t) = (t - \sin t,\ 1 - \cos t)$ pro $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a osou x.

(b) křivkou C určenou parametrizací $\varphi(t) = (t - t^2,\ e^t)$ pro $t \in \langle 0, 1\rangle$, a osou y.

Řešení: zde.

13.3 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde křivka $\mathcal{C}$ je hranicí plochy $M: \quad z = x^2 + y^2, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$ a pole je

$$\vec{F} = (x, -z, xy)\ .$$

Křivka $\mathcal{C}$ je orientována kladně při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz kladnou orientaci).

Řešení: zde.

13.4 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde

$$\vec{F}(x, y, z) = (x, y, xy)$$

a křivka $\mathcal{C}$ je průnikem ploch $z = x^2 + y^2$ a $x^2 + y^2 = x$. Křivka $\mathcal{C}$ je orientována kladně při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz kladnou orientaci).

Řešení: zde.

13.5 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\int\limits_{\partial M} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (xz, 2xy, 3xy)$ a $\mathcal{C}$ je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, která je v prvním oktantu. Okraj plochy je orientovaný v záporném smyslu při pohledu seshora (neboli: jestliže křivku, která tvoří okraj zprojektujeme do roviny xy, bude mít tento její obraz zápornou orientaci).

Řešení: zde.

13.6 (Stokesova věta)

Spočítejte práci síly

$$\vec{F}(x, y, z) = \Big((x + 1)^x + z^2\Big)\vec{i} + \Big((y + 1)^y + x^2\Big)\vec{j} + \Big((z + 1)^z + y^2\Big)\vec{k}$$

vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ležící v prvním oktantu. Křivka $\mathcal{C}$ daná okrajem této plochy je orientovaná v záporném smyslu při pohledu seshora (přesněji: ve směru daném posloupnosti bodů $(2, 0, 0) \to (0, 0, 2) \to (0, 2, 0)$).

Řešení: zde.

13.7 (Stokesova věta)

Pomocí Stokesovy věty spočítejte

$$\iint\limits_{M} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S},$$

kde $\vec{F} = (xyz, x, e^{xy} \cos z)$ a M je kužel $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ a $z \geq 0$ s orientací směrem vzhůru.

Řešení: zde.

13.8 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete tok pole $\vec{F}(x, y, z) = (y^2,\ xz^3,\ (z - 1)^2)$ povrchem tělesa E ohraničeného plochami $x^2 + y^2 = 16$, $z = 1$ a $z = 5$. Povrch má vnější orientaci.

Řešení: zde.

13.9 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete tok pole $\vec{F}(x, y, z) = (x,\ y^2,\ y + z)$ povrchem tělesa E ohraničeného plochami $x^2 + y^2 = 4$, $z = x$ a $z = 4$. Povrch má vnější orientaci.

Řešení: zde.

13.10 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty pro vektorové pole

$$\vec{F}(x, y, z) = \big(xy,\ yz,\ xz\big)$$

určete $\iint\limits_{M} \vec{F} \cdot d\vec{S}$ kde plocha je $M: \quad x + y + z = 1 \ \ \& \ \ x, y, z \geq 0$ a je orientovaná směrem vzhůru.

Řešení: zde.

13.11 (Gaussova věta)

Pomocí Gaussovy věty určete

$$\iint\limits_M \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

kde $\vec{F}(x, y, z) = (x,\ y,\ z)$ a M je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \geq 0$ s orientací danou vektorovým polem směřujícím vzhůru.

Řešení: zde.