

4. cvičení z Matematické analýzy 2

16. - 20. října 2023

4.1 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení: zde.

4.2 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení: zde.

4.3 Je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nalezněte $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ ve všech směrech, ve kterých existuje. Je zobrazení $\vec{v} \mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ lineární? Je funkce f spojitá?

Řešení: zde.

4.4 Vypočítejte všechny parciálně derivace (1. řádu) funkce f a určete všechny body, ve kterých jsou spojitě, jestliže

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Řešení: zde.

4.5 Pro funkci $f(x, y) = \sqrt{y^2 + x} \cdot \sin \frac{y}{x}$ najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence.

Řešení: zde.

4.6 Pro funkci $f(x, y) = xy + \sin(x - y)$ v bodě $a_0 = (2, 2)$ určete derivaci (tj. totální diferenciál), tečnou rovinu, derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Má graf funkce větší strmost, jestliže se vydáme ve směru určeném vektorem $\vec{w} = (0, 5)$ nebo ve směru určeném vektorem $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$?

Řešení: zde.

4.7 Pro funkci $f(x, y) = \ln(xy^2)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$ určete totální diferenciál, tečnou rovinu a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Určete úhel, který svírá tečná rovina se základnou (tj. s rovinou $z = 0$).

Řešení: zde.

4.8 Pro funkci $f(x, y) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right)$ v bodě $a_0 = (1, 1)$ určete totální diferenciál a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, tečnou rovinu a úhel, který tečná rovina svírá se základnou.

Řešení: zde.