7. cvičení z Matematické analýzy 2

6. - 10. listopadu 2023

7.1 Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = x - y + 3$ za podmínky $3x^2 + 5xy + 3y^2 = 1$, Načrtněte útvar určený touto vazbou.

Řešení: zde.

7.2 Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$ vepište rovnoramenný trojúhelník takový, že má základnu rovnoběžnou s osou x a má maximální obsah.

Řešení: zde.

7.3 Vypočtěte vzdálenost nejbližšího bodu

(a) hyperboly $M: \; x^2 + 5xy + y^2 = 9$ od počátku $(0, 0)$.

(b) hyperboly $M: \; x^2 + 5xy + 2y^2 = 9$ od počátku $(0, 0)$.

Řešení: (a),

Část (b) se udělá obdobně: systém rovnic $2x = \lambda(2x + 5y)$, $2y = \lambda(5x + 4y)$, $x^2 + 5xy + 2y^2 = 9$ budeme řešit opět vydělením prvních dvou, tj. dostaneme $\frac{x}{y} = \frac{2x+5y}{5x+4y}$ tedy

$$0 = 5x^2 + 4xy - 2xy - 5y^2 = 5x^2 + 2xy - 5y^2$$

$$0 = x^2 + \frac{2}{5}xy - y^2 = \left(x + \frac{y}{5}\right)^2 - \frac{26}{25}y^2 = \left(x + \frac{y}{5} - \frac{\sqrt{26}}{5}y\right)\left(x + \frac{y}{5} + \frac{\sqrt{26}}{5}y\right)$$

tedy $x = \frac{\sqrt{26}-1}{5}y$ nebo $x = -\frac{\sqrt{26}+1}{5}y$ a tyto vztahy dosadíme do třetí rovnice. První vztah vede na řešení $(x, y) = \pm(\frac{3\sqrt{26}-3}{\sqrt{2+23\sqrt{26}}}, \frac{15}{\sqrt{2+23\sqrt{26}}})$ druhý vztah řešení nedává.

7.4 Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$$

na množině

$$M: \quad y^2 \leq 1 - x^2.$$

Načrtněte tuto množinu.

Řešení: zde.

7.5 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$ na množině

$$M: \quad x^2 \leq y \leq 4 \; .$$

Řešení: zde.

7.6 Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce $f(x, y) = 3xy$ na množině

(a) $M: \quad x^2+y^2 \le 2.$

(b) $M: \quad x(x-1) \le y \le 0.$

Načrtněte tyto množiny.

Řešení: zde.

7.7 Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x,y)=x^2+y^2-2x$

(a) na množině $x^2+y^2 \le 2$.

(b) na ploše trojúhelníka M s vrcholy $(2,0)$, $(0,2)$ a $(0,-2)$.

Řešení: (b). Část (a) se udělá obdobně jako v příkladu **7.6**(a).

7.8 Najděte tři pozitivní čísla jejichž součin je maximální, a jejichž součet je roven 100.

Řešení: zde.

7.9 Určete rozměry pravoúhlého odkrytého bazénu, který má při daném objemu V minimální povrch.

Řešení: zde.

7.10 Do úseče kužele $1-z=\sqrt{x^2+2y^2}$ vymezené rovinou $z=0$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení: zde.