8. cvičení z Matematické analýzy 2

7. - 11. listopadu 2022

8.1 Do úseče eliptického paraboloidu $z = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3}$ vymezené rovinou $z = 1$ vepište kvádr takový, že jeho stěny budou rovnoběžně s jednotlivými souřadnými rovinami a jenž bude mít maximální objem.

Řešení: zde.

8.2 Změňte pořadí integrace v integrálu

(a) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 f(x,y)\ dx\ dy$,

(b) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin x} f(x,y)\ dy\ dx$,

(c) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\ dx\ dy$,

(d) $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ dy\ dx$,

(e) $\int_0^4 \int_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\ dy\ dx$.

Řešení: (a), (b),(c), (d),(e).

8.3 Vypočítejte hodnotu integrálu a načrtněte oblast integrace:

(a)

$$\int_0^2 \int_{2x}^2 4e^{y^2}\ dy\ dx$$

(a)

$$\int_0^2 \int_{y^2}^4 \cos\sqrt{x^3}\ dx\ dy$$

(c)

$$\iint_E e^{y^3}\sqrt{xy - y^2}\ dS,$$

kde oblast E je omezená přímkami $y = x$, $x = 10y$ a $y = 1$.

(d)

$$\iint_E e^{\frac{y}{x}}\ dS,$$

kde oblast E je trojúhelník s vrcholy $(0,0)$, $(1,1)$ a $(1,10)$.

(e)

$$\iint_E \frac{1}{y^4+1}\, dS$$

kde oblast E je omezena křivkami $x = y^3$, $y = 2$ a $x = 0$.

Řešení: (a), (b), (c), (d) pouze prohozené x a y, (e).

8.4 Vypočítejte hodnotu integrálu:

(a)

$$\iint_E e^{\max\{x^2,y^2\}}\, dx\ dy\ ,$$

kde $E = \langle 0,1\rangle^2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

(b)

$$\iint_M |y - \sin x|\, dx\ dy$$

kde $M = \langle 0,\pi\rangle \times \langle 0,1\rangle$.

Řešení: (a), (b).

8.5 Vyjádřete integrál

$$\iint_E f(x,y)\ dx\ dy$$

v polárních souřadnicích v pořadí $d\varrho\ d\varphi$ pro oblasti

(a) $E = \langle 1,2\rangle \times \langle 0,1\rangle$,

(b) $E: \quad x^2 + y^2 \leq 4\ \ \&\ \ y + x^2 \geq 0\ \ \&\ \ x \geq 0\ \ \&\ \ y \leq 0.$

(c) E, která je plochou trojúhelníka s vrcholy $(1,0)$, $(2,0)$ a $(1,1)$.

(d) $E: \quad x^2 + y^2 \leq 9\ \ \&\ \ 0 \leq y \leq 1\ \ \&\ \ x \geq 0.$

(e) $E: \quad x^2 + (y-1)^2 \leq 1\ \ \&\ \ y \geq 1\ \ \&\ \ x \geq 0.$

Řešení: (a), (b) (podobně), (c), (d).

8.6 Použitím polárních souřadnic spočítejte integrály

(a)

$$\int_{-2}^{2} \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy\ dx,$$

(b)

$$\int_{0}^{1} \int_{x}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dy\ dx$$

Řešení: (a), (b).