Vzorový 1. zápočtový test

1. Určete směr největšího růstu funkce $f(x,y) = x^3 e^{y^2} + \sin(x-y)$ v bodě $a_0 = (1,1)$ a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Jiný příklad: Určete tečnou rovinu k ploše $z + 1 = xe^y \cos z$ v bodě $(1,0,0)$. Určete také normálu k ploše v daném bodě (tj. přímku kolmou k tečné rovině a procházející daným bodem).

2. Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x,y) = 6 - 4x - 3y$$

na množině

$$M: \ x^2 + y^2 \leq 4y - 2x.$$

Načtrněte útvar určený touto vazbou.

Jiný příklad: Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy(3 - x + y)$$

na otevřené množině

$$M : x > 0\ .$$

Řešení:

1.

(a) $\mathrm{grad}f(1,1) = (3x^2e^{y^2} + \cos(x-y),\ 2x^3ye^{y^2} - \cos(x-y))_{(1,1)} = (3e+1, 2e-1)$,

směr největšího růstu je $\vec{v} = \frac{\mathrm{grad}f(1,1)}{\|\mathrm{grad}f(1,1)\|} = (\frac{3e+1}{\sqrt{(3e+1)^2+(2e-1)^2}}, \frac{2e-1}{\sqrt{(3e+1)^2+(2e-1)^2}})$

derivace ve směru $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ je $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1) = (3e+1, 2e-1) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3+\sqrt{3}}{2}e + \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

(b) plocha je zadána implicitně funkcí $\Phi(x,y,z) = xe^y\cos z - z - 1$

normála k ploše je $\vec{n} = \mathrm{grad}\Phi(1,0,0) = (e^y\cos z, xe^y\cos z, -xe^y\sin z - 1)_{(1,0,0)} = (1,1,-1)$

tečná rovina je $(x-1) + y - z = 0$

normála má (parametrický) popis $(x,y,z) = (1,0,0) + t(1,1,-1) = (t+1, t, -t)$, $t \in \mathbb{R}$

2.

(a) $M:\ (x+1)^2+(y-2)^2 \leq 5$ je kruh, tedy omezená a uzavřená množina. Vyšetření f rozdělíme na

• vnitřek $M^\circ:\ (x+1)^2 + (y-2)^2 < 5$

kde je nutná podmínka pro extrém nulová derivace $(0,0) = df(x,y) = (-4,-3)$, což nenastává.

• hranici $\partial M:\ (x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$

kde můžeme použít Lagrangeovu větu pro $\partial M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 0\}$, kde

$$g(x,y) = (x+1)^2 + (y-2)^2 - 5\ .$$

Tedy pro extrém v $(x,y) \in \partial M$ existuje $\lambda \in \mathbb{R}$, že

$$(-4,-3) = \mathrm{grad}f(x,y) = \lambda \cdot \mathrm{grad}g(x,y) = (2\lambda(x+1), 2\lambda(y-2))$$

pokud $\mathrm{grad}g(x,y) = (2(x+1), 2(y-2)) \neq (0,0)$. Nenulovost gradientu g je zřejmě splněna pro jakékoliv $(x,y) \in \partial M$.

Z rovnic

$$-4 = 2\lambda(x+1)$$
$$-3 = 2\lambda(y-2)$$
$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

máme vydělením první a druhé rovnice, že $\frac{4}{3} = \frac{x+1}{y-2}$, což můžeme udělat protože druhá rovnice je nenulová. Tedy $y-2 = \frac{3}{4}(x+1)$ a dosazením do třetí rovnice je $(x+1)^2(1+\frac{9}{16}) = 5$ neboli $x+1 = \pm\frac{4}{\sqrt{5}}$. Podezřelé body jsou proto

$$(x_1,y_1) = (\frac{4}{\sqrt{5}} - 1, \frac{3}{\sqrt{5}} + 2)$$

a

$$(x_2,y_2) = (-\frac{4}{\sqrt{5}} - 1, -\frac{3}{\sqrt{5}} + 2)$$

kde zřejmě $f(x_2,y_2) > f(x_1,y_1)$. Toto jsou jediné podezřelé body v M. Z věty o nabývání maxima a minima f na M (viz vlastnosti M) plyne, že v (x_2,y_2) je maximum a v (x_1,y_1) je minimum f na M.

(b) Nutná podmínka pro lokální extrém funkce

$$f(x,y) = 3xy - x^2y + xy^2$$

na M je nulovost první derivace této funkce

$$(0,0) = df(x,y) = (3y - 2xy + y^2, 3x - x^2 + 2xy)\ .$$

Z rovnic

$$y(3 - 2x + y) = 0$$

$$x(3 - x + 2y) = 0 \overset{x>0}{\Longrightarrow} x - 2y = 3$$

plyne (z první rovnice) buď $y = 0$ (a tedy $x = 3$ podle druhé rovnice) nebo že platí soustava

$$2x - y = 3$$

$$x - 2y = 3$$

která má jediné řešení $(x,y) = (1,-1)$.

Vyšetříme druhou derivaci v bodech $(x,y) = (3,0) \in M$ a $(x,y) = (1,-1) \in M$:

$$d^2f(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 3 - 2x + 2y \\ 3 - 2x + 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Tedy

$$d^2f(3,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

je indefinitní (podle Sylvestr. kriteria $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = -9$) a v bodě $(x,y) = (3,0)$ je sedlo.

A

$$d^2f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

je pozitivně definitní (podle Sylvestr. kriteria $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 3$) a v bodě $(x,y) = (1,-1)$ je lokální minimum.