Vzorový 2. zápočtový test

1. Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_M (e^{\frac{x}{y}} - x)\ dS$$

, kde oblast M je omezena křivkami $x = y^2$, $x = 0$ a $y = 1$.

Jiný příklad: Vypočítejte hodnotu integrálu

$$\iiint\limits_P x^2\ dV\ ,$$

kde $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2\ \&\ 0 \leq y\ \&\ x \leq 0\}$.

2. Vypočtěte práci vektorového pole $\vec{F}(x, y) = (y, -2x)$ podél orientované křivky $x = y^2$ jdoucí z bodu $(1, 1)$ do bodu $(4, -2)$.

Jiný příklad: Spočítejte křivkový integrál

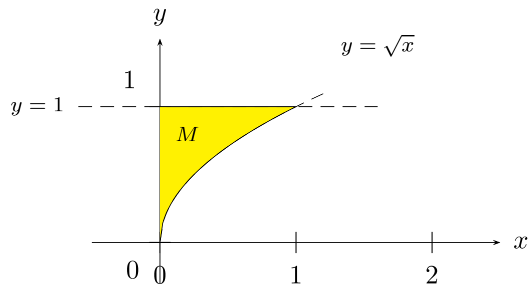
$$\int_C xy\ ds\ ,$$

kde $C : x^2 + y^2 = 2y$.

Řešení:

1.

(a) Oblast integrace M:



Na první pohled je jednodušší zkusit integrovat nejdříve podle x.

$$M: \quad 0 \le y \le 1 \quad \& \quad 0 \le x \le y^2$$

$$\iint\limits_M (e^{\frac{x}{y}} - x)\ dS = \int\limits_0^1 \int\limits_0^{y^2} (e^{\frac{x}{y}} - x)\ dx\ dy = \int\limits_0^1 \left[ye^{\frac{x}{y}} - \tfrac{x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int\limits_0^1 ye^y - y - \tfrac{y^4}{2}\ dy =$$

$$= \left[(y-1)e^y\right]_0^1 - \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{10} = \tfrac{2}{5}\ .$$

Poznámka: Označme si A úsečku od 0 do 1 na ose y. Na A není integrovaná funkce definována. Problémem je předpis $e^{\frac{x}{y}}$. Protože jde ale o nezápornou a spojitou funkci na $M \setminus A$, můžeme Fubiniovu větu použít a výsledek je skutečně hodnota dvojného integrálu.

Navíc, funkci $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$ lze spojitě dodefinovat na celé M. Pro $y_0 > 0$ máme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,y_0)} e^{\frac{x}{y}} = e^0 = 1$.

Pro bod $(0,0)$ použijeme odhad: $0 \le x \le y^2$ a $0 < y \le 1$, tak $0 \le \frac{x}{y} \le y$ a tedy $1 = e^0 \le e^{\frac{x}{y}} \le e^y$. Tedy z věty o limitě sevřené funkce máme

$$1 = \lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)\\(x,\,y)\,\in\,M}} 1 \le \lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)\\(x,\,y)\,\in\,M}} e^{\frac{x}{y}} \le \lim_{\substack{(x,\,y)\,\to\,(0,\,0)\\(x,\,y)\,\in\,M}} e^y = 1$$

Spojitě dodefinovaná funkce f je proto na M omezená.

(b) Oblast integrace P je čtvrtina kužele s výškou 2 a poloměrem podstavy také 2, který stojí na svém vrcholu v počátku. Použijeme proto cylindrické souřadnice:

$$\Phi: \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad z = h\ .$$

Jako parametrizaci P si vezmeme

$$U: \quad 0 \le r \le h \quad \& \quad 0 \le h \le 2 \quad \& \quad \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi\ .$$

Můžeme tedy psát

$$\iiint\limits_P x^2\ dV = \iiint\limits_U r^2\cos^2\varphi \cdot r\ dV = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int\limits_0^2 \int\limits_0^h r^3\cos^2\varphi\ \ dr\ dh\ d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int\limits_0^2 \cos^2\varphi\ \frac{h^4}{4}\ \ dh\ d\varphi =$$

$$= \frac{2^5}{4\cdot 5} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\varphi\ d\varphi = \frac{8}{5}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{5}.$$

Řešení:

2.

(a) Parametrizace křivky C je

$$\varphi : x = t^2,\ y = t,\quad t \in \langle -2, 1\rangle$$

která je v protisměru k zadané orientaci. Takže

$$\int_C \vec{F} d\vec{s} = -\int_{-2}^{1} \Big(y(t), -2x(t)\Big) \cdot \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} dt = -\int_{-2}^{1} \Big(t, -2t^2\Big) \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} dt =$$

$$= \int_{-2}^{1} 0\ dt = 0$$

(b) Křivka je kružnice $x^2 + (y-1)^2 = 1$, takže ji zparametrizujeme jako

$$\varphi : x = \cos t,\ y = \sin t + 1,\quad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$$

takze $\|\varphi'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = 1$ a

$$\int_C xy\ ds = \int_0^{2\pi} x(t) \cdot y(t) \cdot \|\varphi'(t)\|\ dt = \int_0^{2\pi} \cos t \cdot (\sin t + 1) \cdot 1\ dt = \int_0^{2\pi} \frac{\sin(2t)}{2} + \cos t\ dt = 0$$