

3. cvičení z Matematické analýzy 2

6. - 10. října 2025

3.1 Vyšetřete existenci následujících limit:

$$(a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y}{y^2+x}$$

$$(b) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (1,1,1)} \frac{xz^2-y^2z}{xyz-1}$$

$$(c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 \sin^2 y}{x^2+y^2}$$

$$(d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2+2y^2}$$

$$(e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$$

$$(f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4+y^4}{|x|^3+|y|^3}$$

$$(g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^4+y^4} \cdot e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$$

$$(h) \lim_{(x,y) \rightarrow (4,0)} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{y}$$

$$(i) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2)^{x^2 y^2}$$

Řešení: (a), (b), (c), (d), (e), (f), (g), (h), (i).

3.2 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{pro } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & \text{pro } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení: zde.

3.3 Najděte parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

ve všech bodech $a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Je funkce $\frac{\partial f}{\partial x}$ spojitá v bodě $a_0 = (0, 0)$?

Řešení: zde.

3.4 Je dána funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nalezněte $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ ve všech směrech, ve kterých existuje. Je zobrazení $\vec{v} \mapsto \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0)$ lineární? Je funkce f spojitá?

Řešení: zde.

3.5 Vypočtěte všechny parciálně derivace (1. řádu) funkce f a určete všechny body, ve kterých jsou spojitě, jestliže

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Řešení: zde.

3.6 Pro následující funkce f najděte parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ a obory jejich existence:

(a) $f(x, y) = \sqrt{y^2 + x} \cdot \sin \frac{y}{x},$

(b) $f(x, y) = x^2 y + \ln(x + 2y),$

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^3 y + 1} \cdot \cos \frac{x}{y}.$

Řešení: (a), (b), (c).