Ukázka zápočtového testu

1. [10 bodů] Pro funkci $f(x,y) = x^3 e^{y^2} + \sin(x-y)$ určete v bodě $a_0 = (1,1)$ tečnou rovinu ke grafu funkce a derivaci ve směru $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

- *Jiný příklad:* Určete tečnou rovinu k ploše $z + 1 = xe^y \cos z$ v bodě $(1,0,0)$. Určete také normálu k ploše v daném bodě (tj. přímku kolmou k tečné rovině a procházející daným bodem).

- *Jiný příklad:* Určete tečnou rovinu ke grafu funkce $f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2} - xy$ v bodě $a = (\frac{1}{2}, 1)$. Jaký úhel svírá tato tečná rovina s rovinou $z - x = 2$?

2. [10 bodů] Najděte nejmenší a největší hodnoty funkce

$$f(x,y) = 6 - 4x - 3y$$

za podmínky $x^2 + y^2 = 4y - 2x$. Načtrněte útvar určený touto vazbou.

- *Jiný příklad:* Najděte lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = xy(3 - x + y)$$

na otevřené množině

$$M : x > 0 \ .$$

- *Jiný příklad:* Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + 4x + 8y$$

na množině $M = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,2\rangle$.

3. [10 bodů] Určete poloměr konvergence a sečtěte mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big(n + (-2)^n\Big) x^n$$

na vnitřku oboru konvergence.

- *Jiný příklad:* Rozviňte funkci

$$f(x) = \frac{x+9}{4 - 3x - x^2}$$

do mocninné řady se středem v $x_0 = -1$. Určete největší otevřený interval, kde nastává rovnost funkce a příslušné řady.

- *Jiný příklad:* Vypočítejte integrál

$$\iint_M (e^{\frac{x}{y}} - x)\ dS \ ,$$

kde oblast M je omezena křivkami $x = y^2$, $x = 0$ a $y = 1$.