1 Vyšetřování extrémů

Budeme se zabývat vyšetřováním extrémů reálných funkcí a to v následujících typech úloh:

- hledání *lokálních* extrémů funkce f na *otevřené* množině U.
- hledání *absolutních (globálních)* extrémů funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M.:

Definice extrémů: Funkce $f : G \to \mathbb{R}$, kde $G \subseteq \mathbb{R}^n$, má v bodě $a_0 \in G$

- *(globální) minimum* na $G \Leftrightarrow$ pro každé $a \in G$ je $f(a) \geq f(a_0)$
- *(globální) maximum* na $G \Leftrightarrow$ pro každé $a \in G$ je $f(a) \leq f(a_0)$
- *lokální minimum* $\Leftrightarrow$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $a \in U_\varepsilon(a_0) \cap G$ je $f(a) \geq f(a_0)$
  (neboli: v bodě a_0 (globální) minimum na $U_\varepsilon(a_0) \cap G$ pro nějaké $\varepsilon > 0$)
- *lokální maximum* $\Leftrightarrow$ existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $a \in U_\varepsilon(a_0) \cap G$ je $f(a) \leq f(a_0)$
  (neboli: v bodě a_0 (globální) maximum na $U_\varepsilon(a_0) \cap G$ pro nějaké $\varepsilon > 0$)

Globální (resp. lokální) minima a maxima se souhrnně nazývají extrémy (opět lokální nebo globální). A dále, pokud jsou ve výše zmíněné definici nerovnosti dokonce ostré (pochopitelně pro body a různé od a_0), říkáme, že daný extrém je ostrý.

Pozorování: Každý globální extrém (na dané množině) je také lokální extrém.

1.1 Vyšetřování lokálních extrémů na otevřených množinách

Věty, které teď budou popisovat nutné nebo postačující podmínky pro existenci extrému funkce více proměnných, jsou analogické případu jedné proměnné.

Nutná podmínka pro lokální extrém na otevřené množině: Nechť pro funkci $f : U \to \mathbb{R}$, kde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, existuje v bodě $a_0 \in U$ (úplná) derivace $f'(a_0)$. Jestliže je v a_0 lokální extrém, pak $f'(a_0) = (0, \ldots, 0)$.

Bod $a \in U$, ve kterém je $f'(a) = (0, \ldots, 0)$, se nazývá *stacionární* bod funkce f.

Co je to symetrická bilineární forma: Zobrazení $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá *symetrická bilineární forma*, jestliže je lineární v každé složce zvlášť, tj. pro každé $\vec{h}, \vec{h}', \vec{k} \in \mathbb{R}^n$ a pro každé $\lambda \in \mathbb{R}$ platí

- $Q[\vec{h} + \vec{h}', \vec{k}] = Q[\vec{h}, \vec{k}] + Q[\vec{h}', \vec{k}]$ a $Q[\lambda\vec{h}, \vec{k}] = \lambda \cdot Q[\vec{h}, \vec{k}]$
- $Q[\vec{k}, \vec{h} + \vec{h}'] = Q[\vec{k}, \vec{h}] + Q[\vec{k}, \vec{h}']$ a $Q[\vec{h}, \lambda\vec{k}] = \lambda \cdot Q[\vec{h}, \vec{k}]$

a jestliže je toto zobrazení symetrické, tj. $Q[\vec{k}, \vec{h}] = Q[\vec{h}, \vec{k}]$ pro každé $\vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$.

Každá symetrická bilineární forma $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je popsána svou maticí $\mathbb{A}$ ve standardní bázi, tj.

$$Q[\vec{h}, \vec{k}] = \vec{h}^T \cdot \mathbb{A} \cdot \vec{k}$$

pro všechna $\vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$. Tato matice $\mathbb{A}$ je symetrická, tedy $\mathbb{A}^T = \mathbb{A}$ (zde $(\cdot)^T$ znamená transponování dané matice).

Asi nejznamějším příkladem takovéto formy je standardní skalární součin, kde odpovídající matice je jednotková matice $\mathbb{E}$.

Co je definitnost bilineární formy: Symetrická bilineární forma $Q : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se nazývá

- *pozitivně definitní* $\iff$ pro každý vektor $\vec{0} \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je $Q[\vec{h}, \vec{h}] > 0$.
- *negativně definitní* $\iff$ pro každý vektor $\vec{0} \neq \vec{h} \in \mathbb{R}^n$ je $Q[\vec{h}, \vec{h}] < 0$.
- *indefinitní* $\iff$ existují vektory $\vec{h}, \vec{k} \in \mathbb{R}^n$ takové, že $Q[\vec{h}, \vec{h}] > 0$ a $Q[\vec{k}, \vec{k}] < 0$.

Postačující podmínky pro lokální extrém na otevřené množině: Nechť funkce $f : U \to \mathbb{R}$ je třídy C^2 na otevřené množině U (tedy má spojité všechny druhé parciální derivace na U). Nechť $a_0 \in U$ je stacionární bod funkce f (tj. $f'(a) = (0, \ldots, 0)$). Jestliže

- $f''(a_0)$ je *pozitivně* definitní $\Rightarrow$ v bodě a_0 je (ostré) lokální minimum.
- $f''(a_0)$ je *negativně* definitní $\Rightarrow$ v bodě a_0 je (ostré) lokální maximum.
- $f''(a_0)$ je *indefinitní* $\Rightarrow$ v bodě a_0 *NENÍ* lokální extrém.

V posledním případě říkáme, že v a_0 je sedlový bod (tj. pokud a_0 je stacionární a $f''(a_0)$ je indefinitní). Tento název je odvozen z toho, že při průchodu bodem a_0 po přímkách v něm máme v nějakém směru lokální minimum a v nějakém jiném zase lokální maximum.

Abychom mohli snadno rozeznávat definitnost forem, bude se nám hodit následující kritérium. Předtím si ještě zaveďme toto značení:

Pro čtvercovou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pro $i = 1, \ldots, n$ označme Δ_i determinant matice typu $i \times i$ vzniklé z prvních i sloupců a prvních i řádků z matice $\mathbb{A}$. (Determinanty Δ_i se nazývají hlavní minory matice $\mathbb{A}$.)

Sylvestrovo kritérium (definitnosti symetrických forem): Nechť symetrická bilineární forma Q je popsána symetrickou matici $\mathbb{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Pak Q je

- *pozitivně definitní* $\iff$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $\Delta_i > 0$.
- *negativně definitní* $\iff$ pro každé $i = 1, \ldots, n$ je $\operatorname{sgn}(\Delta_i) = (-1)^i$.
  (neboli: hlavní minory střídají znaménka, přičemž PRVNÍ je ZÁPORNÉ.)

Pokud je ještě navíc $\det(\mathbb{A}) \neq 0$, pak Q je

- *indefinitní* $\iff$ není pozitivně ani negativně definitní (tj. nenastane ani jeden z předchozích dvou znaménkových případů).

Postup při hledání *lokálních* extrémů funkce f na *otevřené* množině U bude tento:

- najdeme stacionární body $a \in U$ (protože $f'(a) = \vec{0}$ je nutná podmínka);
- dále pak vyšetříme definitnost $f''(a)$ v těchto bodech.

1.2 Vyšetřování globálních extrémů na uzavřených množinách

Budeme pracovat s uzavřenými množinami $G \subseteq \mathbb{R}^n$, které budou obvykle i *omezené* (tj. existuje $K > 0$, že $G \subseteq \langle -K,\ K\rangle^n$; neboli G se vejde do dostatečně velké krychle.) Tyto množiny budou často také zadány nějakou implicitní vazbou.

Věta o nabytí obou globálních extrémů: Spojitá funkce $f : M \to \mathbb{R}$ na uzavřené a omezené množině $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ nabývá svého minima i maxima (tj. existují $a_1, a_2 \in M$, že v a_1 je globální maximum a v a_2 je globální minimum f na M).

Věta o nabytí globálního minima: Nechť $f : M \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce na uzavřené množině $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť dále platí

$$(\forall\ n \in \mathbb{N})(\exists\ K > 0)(\forall\ a \in M) \qquad \|a\| \geq K \Rightarrow f(a) \geq n$$

(tj. jestliže se s bodem a vzdalujeme od počátku, jde hodnota $f(a)$ do plus nekonečna).
Pak funkce f nabývá na M svého globálního minima.

Nutná podmínka pro *vázaný* lokální extrém (Věta o Lagrangeových multiplikátorech):
Nechť $U \subseteq \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f, g_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$ jsou spojitě diferencovatelné funkce. Položme

$$M = \bigcap_{i=1}^{k} \{a \in U \mid g_i(a) = 0\}$$

(funkce g_i se nazývají vazby).
Nechť $a_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M. Jestliže vektory

$$\operatorname{grad} g_1(a_0), \ldots, \operatorname{grad} g_k(a_0) \ \text{ jsou lineárně nezávislé}$$

pak existují $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (tzv. *Lagrangeovy multiplikátory*), že

$$\operatorname{grad} f(a_0) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \operatorname{grad} g_i'(a_0)\ .$$

Alternativní znění:
Nechť M je výše uvedeného tvaru a platí uvedená lineární nezávislost (v bodě $a_0 \in M$). Označme si tzv. Lagrangeovu funkci $L : U \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ tvaru

$$L(x_1, \ldots, x_n, \ell_1, \ldots, \ell_k) := f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{k} \ell_i \cdot g_i(x_1, \ldots, x_n)\ .$$

Jestliže $a \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f zúžené na M, pak existuje $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, že

$$L'(a, \lambda) = \left(\frac{\partial L}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial x_n}, \frac{\partial L}{\partial \ell_1}, \ldots, \frac{\partial L}{\partial \ell_k}\right)_{(a,\lambda)} = (0, \ldots, 0)$$

tedy platí

$$0 = \frac{\partial L}{\partial x_j}(a, \lambda) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) \qquad \text{pro} \ \ j = 1, \ldots, n$$

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \ell_j}(a, \lambda) = g_j(a) \qquad \text{pro} \ \ j = 1, \ldots, k.$$

(**neboli:** Jestliže a je lokální extrém f na M (a platí lineární nezávislost), pak pro nějaké $\lambda \in \mathbb{R}^k$ je (a, λ) stacionárním bodem funkce L.)

Poznámka: Jestliže výše zmíněná lineární nezávislost platí v každém bodě $a \in M$, pak se množina M nazývá *varieta* (angl. *manifold*) a je možné ji přiřadit dimenzi - pomocí věty o implicitní funkci - a sice $\dim M = n - k$. Dimenze tak odpovídá dimenzi n původního prostoru $\mathbb{R}^n$ sníženou o počet k nezávislých vazeb daných funkcemi $g_1, \ldots, g_k$.

Tečný prostor k této varietě M v bodě a_0 je pak kolmý ke všem vektorům $\operatorname{grad} g_1(a_0), \ldots, \operatorname{grad} g_k(a_0)$ a naše Lagrangeova věta tak říká jen to, že v případě lokálního extrému funkce f v bodě a_0 je $\operatorname{grad} f(a_0)$ kolmý k množině M v bodě a_0 (tj. kolmý k tečnému prostoru množiny M v bodě a_0).

V jednoduchém případě, že M je implicitně definovaná plocha v $\mathbb{R}^3$ (neboli vrstevnice funkce g) musí být gradient funkce f kolmý k této ploše (pokud je v daném bodě lok. extrém). To si lze dobře představit třeba když f je gravitační potenciál a $\operatorname{grad} f$ jeho gravitační silové pole působící na bod, jehož pohyb je vázaný na nějakou plochu (zadanou pomocí g). Pak se můžeme ptát, kde jsou na ploše místa s rovnovážnou polohou (stabilní = lokální minimum f, labilní = lokální maximum f).

Důležitá poznámka: Ve větě o Lagr. multiplikátorech je otevřenost množiny U (v definici množiny M) podstatná! Množina M je vždy v blízkém okolí bodu $a_0 \in M$ vpodstatě "rovná"a my se na ni díváme jako kdybychom pracovali ve skutečně rovném prostoru $\mathbb{R}^{n-k}$. V rámci něj už umíme vyšetřovat lokální extrémy pomocí "klasického"derivování a k němu právě potřebujeme, abychom kolem bodu a_0 měli dost prostoru (neboli: aby a_0 byl v jistém smyslu "uvnitř"množiny M).

Postup při hledání *absolutních (globálních)* extrémů funkce f na *uzavřené* (a obvykle také omezené) množině M bude tento:

- pomocí nutných podmínek (obvykle to jsou Lagrangeovy multiplikátory) vyloučíme ty body, kde určitě extrémy nejsou;
- ve zbylé množině podezřelých bodů (obvykle malé) srovnáme jejich funkční hodnoty, ze kterých vybereme největší a nejmenší;
- jestliže víme, že obou extrémů musí být nabyto, pak jsou to právě předchozí nalezené největší a nejmenší hodnoty v podezřelých bodech;
- při hledání pouze globálního minima podstupujeme obdobně - tj. hledáme nejmenší hodnotu mezi podezřelými body;
- Důležité: zde nepotřebujeme používat druhou derivaci! (Ostatně, globálnost případného extrému nám tato druhá derivace stejně nemůže potvrdit.)

Poznámka: Nechť M má tvar z Lagr. věty. Jestliže nějaký bod $a \in M$ nesplňuje podmínku o lineární nezávislosti $\operatorname{grad} g_1(a), \ldots, \operatorname{grad} g_k(a)$, zařadíme ho automaticky mezi podezřelé body. Obvykle takových bodů není mnoho, případně funkce je na nich "uchopitelná". Proto při aplikaci Lagr. věty vlastně vždy ověřujeme, jestli všechny body z M splňují uvedenou podmínku pro lineární nezávislost. Pokud ano, vazbám $g_1, \ldots, g_k$ se pak říká nezávislé.

- -

U funkce $f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ na křivce $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{R}^n$ můžeme postupovat i tak, že si zavedeme nějakou její parametrizaci $\varphi : (a, b) \to \mathcal{C}$ a vyšetříme pak lokální extrémy složené funkce $f \circ \varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$. Je otázkou zkušeností, kdy spíše zvolit Lagrangeovu metodu a kdy spíše parametrizaci.