N e ř e š e n é   ú l o h y

9.1´. Ukažte, že zobrazení $X \equiv (x, y);\ x = a\varrho\cos\varphi,\ y = b\varrho\sin\varphi;\ a, b > 0$ je prosté regulární zobrazení na množině B z úlohy 9.1. Dokažte, že $\det X'(\varrho, \varphi) = ab\varrho$ a že soustava souřadnic není ortogonálmí $(a \neq b)$.

9.2´. Ukažte, že zobrazení $X \equiv (x, y, z)\colon x = a\varrho\cos\varphi,\ y = b\varrho\sin\varphi,\ z = z$ jsou křivočaré souřadnice na množině B z úlohy 9.2 a že $\det X'(\varrho, \varphi, z) = ab\varrho$ a soustava není ortogonální $(a \neq b)$.

9.3´. Ukažte, že zobrazení $X \equiv (x, y, z)\colon x = ar\cos\varphi\sin\vartheta,\ y = br\sin\varphi\sin\vartheta,\ z = cr\cos\vartheta$ jsou křivočaré souřadnice na množině B z úlohy 9.3 a že $\det X'(r, \varphi, \vartheta) = -abc\, r^2\sin\vartheta$.

9.4´. Dokažte, že zobrazení $\xi \equiv (u, v)\colon u = x + at,\ v = x - at,\ a > 0$, je soustava křivočarých souřadnic v R^2. Nakreslete souřadnicové křivky a do soustavy souřadnic ξ přetransformujte rovnici

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\,.$$

[$X \equiv (x, t);\ x = \dfrac{u+v}{2},\ t = \dfrac{u-v}{2a}$; přímky $x + at = u_0,\ x - at = v_0$; $\dfrac{\partial^2 u}{\partial u\,\partial v} = 0$]

10. E X T R É M Y   F U N K C Í   V Í C E   P R O M Ě N N Ý C H

10.1-D. Nechť $f\colon A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R}^n$. Říkáme, že funkce f má v bodě $a \in A$ lokální minimum, resp. lokální maximum, existuje-li okolí $U(A)$ bodu a takové, že pro každý bod $x \in U(a) \cap A$ platí

$$f(x) \geqq f(a),\quad \text{resp.}\quad f(x) \leqq f(a)\,.$$

Je-li splněna podmínka $f(x) > f(a)$, resp. $f(x) < f(a)$, $x \in U(a) \cap A$, $x \neq A$, říkáme, že f má v bodě a ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum. Body, v nichž má funkce lokální minima a maxima, resp. ostrá lokální minima a maxima, nazýváme souhrnně lokální extrémy, resp. ostré lokální extrémy funkce.

Platí-li nerovnost $f(x) \geqq f(a)$, resp. $f(x) \leqq f(a)$ pro všechny body $x \in A$, říkáme, že funkce f má v bodě a absolutní minimum, resp. absolutní maximum. Píšeme pak:

$$f(a) = \min\{f(x);\ x \in A\},\quad \text{resp.}\quad f(a) = \max\{f(x);\ x \in A\}\,.$$

10.2-V. Nechť $f\colon A \to \mathbb{R},\ A \subset \mathbb{R}^n$ je diferencovatelná a má lokální extrém ve vnitřním bodě a množiny A. Potom je

$$df(a) = 0\,,\quad \text{tj.}\quad \operatorname{grad} f(a) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0,\ 1 \leqq i \leqq n\,.$$

10.3. Poznámka. Body, pro které je grad $f(a) = 0$, nazýváme stacionárními body. Pak z věty 10.2 dostáváme nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému:

Má-li funkce f v bodě a lokální extrém, pak je buď a stacionární bod anebo funkce f není diferencovatelná v bodě a.

10.4-V. Nechť funkce $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ má v bodě $a \in A$ spojité parciální derivace 2. řádu a $df(a) = 0$ (tj. a je stacionární bod funkce f). Je-li kvadratická forma $d^2f(a)$:

a) pozitivně definitní, má funkce f v bodě a ostré lokální minimum;
b) negativně definitní, má funkce f v bodě a ostré lokální maximum;
c) indefinitní, nemá funkce f v bodě a lokální extrém.

10.5-D. Nechť $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ a $M \subset \mathbb{R}^n$. Říkáme, že funkce f má v bodě $a \in A \cap M$ lokální extrém vzhledem k množině M, má-li restrikce funkce f na množinu $A \cap M$ v bodě a lokální extrém ve smyslu definice 10.1.

10.6. Poznámka. Lokální extrémy funkce f vzhledem k množině M nazýváme relativní extrémy a je-li množina M popsána soustavou rovnic a nerovnic, mluvíme o vázaných lokálních extrémech. Uvědomíme si, má-li funkce f lokální extrém v bodě a, má v tomto bodě zřejmě i lokální extrém vzhledem k množině.

V dalším uvedeme metodu výpočtu relativního extrému, má-li vazební podmínka speciální tvar.

10.7-V. Nechť funkce $g_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, m < n$ jsou třídy C^k $(k \geq 1)$ v otevřené množině $M \subset \mathbb{R}^n$, nechť pro každé $a \in M$ je $g_i(a) = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$ a platí, že Jacobiova matice zobrazení $g \equiv (g_i)$, tj. matice

$$\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1}, & \dots, & \dfrac{\partial g_n}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial g_m}{\partial x_1}, & \dots, & \dfrac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

má hodnost m.

Potom v okolí každého bodu $a \in M$ je množina M $(n - m)$ rozměrnou hladkou plochou. Tečný prostor $T_a(M)$ je množina všech vektorů $T_a(M) = \{\vec{u} ; \vec{u} \in V(\mathbb{R}^n)$, $dg_i(a, \vec{u}) = 0$, $1 \leq i \leq m\}$.

10.8. Poznámka. Předchozí podmínka znamená, že v každém bodě $a \in M$ jsou vektory grad $g_i(a)$, $i = 1, \dots, m$ lineárně nezávislé a $T_a(M)$ je jádro lineárního zobrazení $dg(a, \vec{u})$. Jádro je tedy řešením soustavy m rovnic o n neznámých tvaru

$$\text{grad } g_i(a)\, \vec{u} = 0\,, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

a protože hodnost matice této soustavy je $m < n$, má netriviální řešení a množina všech těchto řešení je lineární prostor dimenze $n - m$.

10.9-V. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$ je v okolí bodu $a \in M$ r-rozměrnou hladkou plochou a $f: A \to \mathbb{R}$ je diferenciální funkce v bodě A. Má-li funkce f v bodě a lokální extrém vzhledem k množině M, je vektor grad $f(a)$ ortogonální k tečnému prostoru $T_a(M)$ k ploše M v bodě a, tj.

$$\operatorname{grad} f(a) \cdot \vec{u} = 0 \quad \text{pro} \quad \vec{u} \in T_a(M) .$$

Poznamenejme $T_a(M)$ má dimenzi r .

10.10. <u>Metoda Lagrangeových multiplikátorů.</u> Nechť funkce $f, g_1, \ldots, g_m$, $m < n$ jsou třídy C^1 na otevřené množině M , která je popsána jako řešení soustavy rovnic $g_1(x) = 0, \ldots, g_m(x) = 0$ a v každém bodě $a \in M$ má Jacobiova matice $(\frac{\partial g_i}{\partial x_j})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ hodnot m (tj. M je $(n - m)$-rozměrnou hladkou plochou).

1) Má-li funkce f v bodě $a \in M$ lokální extrém vzhledem k množině M, pak existuje právě jedna m-tice čísel $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ taková, že:

$$\operatorname{grad} f(a) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \operatorname{grad} g_i(a) = 0 \quad (\text{tj. } \operatorname{grad} f(a) \perp T_a(M)) ,$$

neboli $a \in \mathbb{R}^n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$ jsou řešením soustavy

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(a)}{\partial x_j} = 0 , \quad 1 \leqq j \leqq n ,$$

$$g_i(a) = 0 , \quad 1 \leqq i \leqq m . \qquad (*)$$

2) Jsou-li funkce $f, g_1, \ldots, g_m$ třídy C^2 v M a $a \in M$ je relativně stacionární bod (řešení soustavy $(*)$), pak platí:

Buď

$$L(a, \lambda) = f(a) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(a)$$

a

$$d^2L(a, \lambda) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} dx_i dx_k \qquad (**)$$

je druhý diferenciál funkce L v bodě a . Je-li kvadratická forma $d^2L(a, \lambda)$ zúžená na tečný prostor $T_a(M)$ v bodě $a \in M$:

a) pozitivně definitní, má funkce f ostré lokální minimum vzhledem k množině M;
b) negativně definitní, má funkce f ostré lokální maximum vzhledem k množině M;
c) indefinitní, nemá funkce f lokální extrém vzhledem k množině M.

10.11. <u>Poznámka.</u> Je-li kvadratická forma $d^2L(a, \lambda)$ definitní v n proměnných, je samozřejmě i její zúžení na $T_a(M)$ definitní a není jej třeba provádět.

Postupujeme tedy takto: Z daných funkcí $f, g_1, \ldots, g_m$ utvoříme funkci $L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ a nalezneme relativně stacionární bod jako řešení soustavy $(*)$. Určíme druhý diferenciál d^2L, který má tvar $(**)$. Není-li tato forma definitní, pak ze soustavy

$$dg_i(a, \vec{u}) = 0 , \quad 1 \leqq i \leqq m ,$$

která popisuje tečný prostor $T_a(M)$, vypočteme m proměnných z n-tice $u_1, \ldots, u_n$, tj. $dx_1, \ldots, dx_n$ a dosadíme do kvadratické formy d^2L, dané vztahem $(**)$. Dostaneme kvadratickou formu v $(n - m)$ proměnných a podle jejího typu rozhodneme o existenci relativního extrému.

10.12. <u>Poznámka.</u> Při hledání absolutního extrému funkce $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ postupujeme analogicky jako pro funkci jedné proměnné. Platí:

Věta: Je-li f spojitá na kompaktní (uzavřené a omezené) množině $A \subset \mathbb{R}^n$, pak nabývá své největší a nejmenší hodnoty.

Tyto hodnoty hledáme takto: Má-li funkce největší či nejmenší hodnotu ve vnitřním bodě množiny A, pak se jedná o lokální extrém a ten nalezneme tak, že počítáme, kde grad $f(a) = 0$ nebo funkce není v bodě a diferencovatelná. Leží-li tento bod na hranici a je-li v okolí bodu hranice hladkou plochou, hledáme relativní stacionární bod metodou Lagrangeových multiplikátorů. Nakonec zbydou body hranice, kde nelze takto rozhodnout. Porovnáním hodnot funkce ve všech takto získaných bodech zjistíme, která hodnota je největší a která nejmenší.

Řešené úlohy

10.1. Nalezněte lokální extrémy funkcí

a) $f(x, y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$ pro $x > 0$ a $y > 0$;

b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

c) $f(x, y) = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$;

d) $f(x, y) = x\sqrt{y} - x^2 - y + 6x + 3$;

e) $f(x, y) = \sqrt[3]{(1 + x)^2(1 - y)^2}$.

Řešení: a) Funkce $f(x, y)$ je na množině $\{(x, y);\ x > 0,\ y > 0\}$ všude diferencovatelná a proto podle věty 10.2 může mít extrém pouze ve stacionárním bodě. Dostaneme tedy:

$$\text{grad } f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = y - \frac{50}{x^2} = 0\ ;\quad \frac{\partial f}{\partial y} = x - \frac{20}{y^2} = 0\ .$$

Řešením soustavy dostaneme stacionární bod $A = (5;\ 2)$. Rozhodnutí o existenci extrému provedeme podle $d^2f(A)$. Je

$$d^2f = \frac{100}{x^3}\,dx^2 + 2dxdy + \frac{40}{y}\,dy^2$$

a tedy

$$d^2f(A) = \frac{4}{5}\,dx^2 + 2dxdy + 5dy^2\ .$$

Použijeme Sylvestrova kritéria:

$$\frac{4}{5} > 0\ ;\quad \begin{vmatrix} \frac{4}{5}\ ; & 1 \\ 1\ ; & 5 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0\ .$$

Forma $d^2f(A)$ je tedy pozitivně definitní a funkce f má v bodě $A \equiv (5;\ 2)$ lokální minimum.

b) Obdobně jako v případě a) dostaneme podmínky pro stacionární body:
$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x = 0$. Odtud dostaneme $x^2 = y \Rightarrow x^4 - x = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $y_1 = 0$; $y_2 = 1$. Získali jsme dva stacionární body: $A_1 = (0;\ 0)$, $A_2 = (1;\ 1)$.

Dále vypočteme $d^2f = 6x dx^2 - 6dxdy + 6y\,dy^2$. Pro bod $A_1 \equiv (0;\ 0)$ máme $d^2f(A_1) = -6dxdy$ a to je forma indefinitní a tedy v bodě A_1 nemá funkce lo-

kální extrém. Pro bod $A_2 \equiv (1; 1)$ je $d^2f(A_2) = 6(dx^2 - dxdy + dy^2) =$
$= 6(dx^2 - dxdy + \frac{1}{4}dy^2 + \frac{3}{4}dy^2) = 6\left[(dx - \frac{1}{2}dy)^2 + \frac{3}{4}dy^2\right]$ a to je pozitivně definitní kvadratická forma a tudíž funkce f má v bodě $A_2 \equiv (1, 1)$ lokální minimum.

c) Funkce je v $\mathbb{R}^2$ diferencovatelná a tak extrém může mít pouze ve stacionárních bodech a pro ně dostaneme podmínky:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2 + y^2 + 10x = 0\ ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 0\ .$$

Řešením druhé rovnice získáme $y = 0$ nebo $x = -1$. Pro $y = 0$ pak první rovnice má tvar $6x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow x(x + \frac{5}{3}) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ nebo $x = -\frac{5}{3}$. Pro řešení $x = -1$ přejde první rovnice na tvar $y^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow y = 2$ nebo $y = -2$. Dostaneme tedy stacionární body: $A_1 \equiv (0; 0)$; $A_2 \equiv (-\frac{5}{3}; 0)$; $A_3 \equiv (-1, 2)$; $A_4 \equiv (-1; -2)$. Dále získáme $d^2f = (12x + 10)dx^2 + 4y\ dxdy + (2x + 2)dy^2$. Postupně získáme:

1) $d^2f(A_1) = 10dx^2 + 2dy^2 > 0 \Rightarrow$ v bodě A_1 je lokální minimum;

2) $d^2f(A_2) = -10dx^2 - \frac{4}{3}dy^2 < 0 \Rightarrow$ v bodě A_2 je lokální maximum;

3) $d^2f(A_3) = -2dx^2 + 8dxdy = -2(dx^2 + 4dxdy) = -2(dx^2 - 4dxdy + 4dy^2) + 8dy^2 =$
$= -2(dx - 2dy)^2 + 8dy^2$ a to je indefinitní forma a tedy v bodě A_3 funkce extrém nemá.

4) $d^2f(A_4) = -2dx^2 - 8dxdy = -2(dx^2 + 4dxdy + 4dy^2) + 8dy^2 = -2(dx + 2dy)^2 + 8dy^2$ je indefinitní forma a tedy funkce f v bodě A_4 nemá extrém.

d) Funkce je definovaná pro $\{(x, y);\ y \geqq 0\}$ a je diferencovatelná ve vnitřních bodech této množiny, tj. pro $y > 0$. Pro stacionární body dostaneme podmínky:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{y} - 2x + 6 = 0\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{y}} - 1 = 0\ .$$

Z druhé rovnice získáme $x = 2\sqrt{y}$ a dosazením do první rovnice dostaneme $3x - 12 = 0$ $\Rightarrow x = 4$ a tedy $y = (\frac{x}{2})^2$. Získáme stacionární bod $A = (4; 4)$. Dále je
$d^2f = -2dx^2 + \frac{1}{\sqrt{y}}\ dxdy - \frac{1}{4}\ \frac{x}{\sqrt{y^3}}\ dy^2$.

V bodě $A \equiv (4; 4)$ je tedy $d^2f(A) = -2dx^2 + \frac{1}{2}dxdy - \frac{1}{8}dy^2$. Podle Sylvestrova kritéria je:

$$-2 < 0\ ; \qquad \begin{vmatrix} -2; & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4}; & -\frac{1}{8} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} > 0\ .$$

Forma $d^2f(A)$ je tedy negativně definitní a funkce f má v bodě A lokální maximum.

Zbývá vyšetřit chování funkce $f(x, y)$ na hranici definičního oboru. Uvažujme nejprve funkci $f(x, 0) = g(x) = -x^2 + 6x + 3$. Aby měla funkce $f(x, y)$ v některém bodě hranice lokální extrém, musí jej mít funkce $g(x)$. Z rovnice $g'(x) = -2x + 6 = 0$ dostaneme $x = 3$ a z podmínky $g''(x) = -2 < 0$ plyne, že funkce $g(x)$ má v bodě $x = 3$ lokální maximum.

Aby měla funkce $f(x, y)$ v bodě $B = (3, 0)$ lokální extrém, tedy lokální maximum, musí být $f(x, y) < f(3, 0)$ pro (x, y) z nějakého okolí bodu $(3, 0)$. Uvažujme funkci $f(3, y) = 3\sqrt{y} - y + 12$ pro $y > 0$. Je $\frac{\partial f(3, y)}{\partial y} = \frac{3}{2\sqrt{y}} - 1 > 0$ pro $0 < y < \frac{9}{4}$ a tedy funkce $f(3, y)$ jako funkce proměnné y je rostoucí a nemůže platit podmínka $f(3, 0) > f(3, y)$ v okolí bodu $(3, 0)$. V bodech $(x, 0)$, $x \in \mathbb{R}$, nemá funkce $f(x, y)$ lokální extrém.

e) Funkce $f(x, y)$ je diferencovatelná s výjimkou bodů přímek $x = -1$ a $y = 1$. Pro stacionární body dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (1-y)^{\frac{2}{3}} \frac{2}{3}(1+x)^{-\frac{1}{3}} = 0 \qquad x \neq -1, y \neq 1 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = (1+x)^{\frac{2}{3}} \frac{-2}{3} (1-y)^{-\frac{1}{3}} = 0$$

Tato soustava nemá žádné řešení. Lokální extrémy tedy mohou být pouze v bodech přímek $x = -1$ a $y = 1$. Je-li $x = -1$ nebo $y = 1$, je $f(-1, y) = f(x, 1) = 0$. Ale pro $y \neq 1$ a $x \neq -1$ je $f(x, y) > 0$. Znamená to, že ve všech bodech $(x, 1)$ a $(-1, y)$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ má funkce neostré lokální minimum.

10.2. Určete lokální extrémy funkce $y(x)$ definované implicitně rovnicí:

a) $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0$;

b) $x^2y^3 + y - 3 = 0$;

c) $\operatorname{arctg} y + x - y = 0$.

Ř e š e n í : a) Podle věty o implicitně zadané funkci je v okolí každého řešení rovnice, pro něž $2x + 2y + 2 \neq 0$, řešení grafem funkce $y = y(x)$ a pro její derivaci dostaneme:

$$2x + 2y + 2xy' + 2yy' - 4 + 2y' = 0 \Rightarrow$$

$$y'(2x + 2y + 2) = 4 - 2x - 2y \Rightarrow y'(x) = \frac{2 - x - y}{x + y + 1} .$$

Nutnou podmínkou pro extrém je $y'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - x - y = 0$. Stacionární bod dostaneme jako řešení soustavy:

$$\begin{aligned} x + y &= 2 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 &= 0 \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{aligned} &y = 2 - x \\ &x^2+4x-2x^2+4-4x+x^2-4x+4-2x-2 = 0 . \end{aligned}$$

Tedy je $-6x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{5}{3}$. Dále pro druhou derivaci funkce $y(x)$ dostaneme:

$$y''(2x + 2y + 2) + y'(2 + 2y' + 2) = 2 - 2y' .$$

Dosadíme-li $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{5}{3}$ a $y'(\frac{1}{3}) = 0$, dostaneme, že

$$y''(\frac{2}{3} + \frac{10}{3} + 2) = -2 \qquad y''(\frac{1}{3}) = -\frac{1}{4} < 0 .$$

Funkce $y(x)$, která je řešením dané rovnice, má jediný lokální extrém a to lokální maximum v bodě $x = \frac{1}{3}$.

b) Pro derivaci funkce $y(x)$ dostaneme rovnici:

$$2xy^3 + 3x^2y^2y' + y' = 0 \Rightarrow y'(1 + 3x^2y^2) = -2xy^3 .$$

Derivace je nulová pouze pro bod $x = 0$. Dále dostaneme

$$y''(1 + 3x^2y^2) + y'(6xy^2 + 6x^2yy') = -2y^3 - 6xy^2y' .$$

Dosadíme $x = 0$, $y(0) = 3$; $y'(0) = 0$ a dostaneme:

$$y''(0) = -16 < 0 .$$

Funkce $y(x)$ má jediný lokální extrém a sice maximum v bodě $x = 0$.

c) Z rovnice dostaneme vztah pro derivaci $y'(x)$ řešení:

$$\frac{y'}{1+y^2} + 1 - y' = 0 \Leftrightarrow y'\,\frac{-y^2}{1+y^2} = -1 \Leftrightarrow y' = \frac{1+y^2}{y^2} = 1 + \frac{1}{y^2}.$$

V žádném bodě není $y' = 0$, funkce nemá extrém. Vidíme, že vždy je $y'(x) > 0$ a tedy je funkce $y(x)$ rostoucí.

10.3. Nalezněte lokální extrémy funkcí:

a) $f(x, y, z) = x^3 + y^2 + \frac{z^2}{2} - 3xz - 2y + 2z$;

b) $f(x, y, z) = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ pro $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

Ř e š e n í : a) Funkce je všude diferencovatelná a tak může mít lokální extrém pouze ve stacionárním bodě. Pro ně dostaneme podmínky:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3z = 0\ ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2 = 0\ ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = z - 3x + 2 = 0\ .$$

Odtud dostaneme: $y = 1$; $z = x^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

Dostaneme tedy body $A \equiv (1; 1; 1)$; $B \equiv (2; 1; 4)$. Dále je

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 1\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -3; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 0\ .$$

Pro bod $A \equiv (1; 1; 1)$ má matice formy $d^2f(A)$ tvar:

$$\begin{pmatrix} 6; & 0; & -3 \\ 0; & 2; & 0 \\ -3; & 0; & 1 \end{pmatrix}$$

Podle Sylvestrova kritéria je $\Delta_1 = 6 > 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 6; & 0 \\ 0; & 2 \end{vmatrix} = 12 > 0$$

a $$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 6; & 0; & -3 \\ 0; & 2; & 0 \\ -3; & 0; & 1 \end{vmatrix} = 2(6-9) = -6 < 0\ .$$

V bodě A nemá funkce f lokální extrém, neboť forma $d^2f(A)$ je indefinitní.
V bodě $B \equiv (2; 1; 4)$ má forma $d^2(B)$ matici:

$$\begin{pmatrix} 12; & 0; & -3 \\ 0; & 2; & 0 \\ -3; & 0; & 1 \end{pmatrix}$$

Opět je $\Delta_1 = 12 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12; & 0 \\ 0; & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0$

a $\Delta_3 = 2(12 - 9) = 6 > 0$.

Forma $d^2f(B)$ je pozitivně definitní a tedy funkce f má v bodě B lokální minimum.

b) Funkce f je diferencovatelná na uvažovaném oboru a pro stacionární body máme podmínky:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 - \frac{y^2}{4x^2} = 0\ ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{2x} - \frac{z^2}{y^2} = 0\ ; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{y} - \frac{2}{z^2} = 0\ .$$

Odtud dostaneme: $4x^2 = y^2$; $y^3 = 2xz^2$; $z^3 = y$. Hledáme kladné řešení, tedy je $y = 2x = z^3$ a dosadíme-li do druhé rovnice dostaneme $y^3 = yz^2 \Rightarrow$ $\Rightarrow y^2 = z^2 \Rightarrow y = z$. Ze třetí rovnice dostaneme $z^3 = z$ a tedy $z = 1$. Odtud dostaneme postupně $y = 1$, $x = \frac{1}{2}$. Dostáváme stacionární bod $A \equiv \left[\frac{1}{2}; 1; 1\right]$.
Pro formu d^2f dostaneme koeficienty:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^2}{2x^3}\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{2x} + \frac{2z^2}{y^3}\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{2}{y} + \frac{4}{z^3}\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{y}{2x^2}\ ;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0\ ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = -\frac{2z}{y^2}\ .$$

Podle Sylvestrova kritéria postupně dostaneme:

$$\Delta_1 = 4 > 0\ ; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4; & -2 \\ -2; & 3 \end{vmatrix} = 12 - 4 = 8 > 0\ ;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4; & -2; & 0 \\ -2; & 3; & -2 \\ 0; & -2; & 6 \end{vmatrix} = 72 - 16 - 24 = 32 > 0\ .$$

Forma $d^2f(A)$ je pozitivně definitní, funkce f má v bodě A lokální minimum.

10.4. Určete extrémy funkce $z(x, y)$, která je řešením rovnice

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0\ .$$

Ř e š e n í : Podle věty o implicitně definované funkci víme, že funkce $z(x, y)$ je diferencovatelná a pro stávající body dostaneme podmínky:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0\ .$$

$$4x + 2z\frac{\partial z}{\partial x} + 8z + 8x\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$4y + 2z\frac{\partial z}{\partial y} + 8x\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(2z + 8x - 1) = -4x - 8z$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(2z + 8x - 1) = -4y\ .$$

Podmínka $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$ dává $y = 0$ a $x = -2z$. Dosazením do rovnice pro funkci z dostaneme $7z^2 + z - 8 = 0 \Rightarrow z_1 = 1$, $z_2 = -\frac{8}{7}$. Získali jsme dva stacionární body: $A \equiv (-2; 0; 1)$, $B \equiv (\frac{16}{7}; 0; -\frac{8}{7})$.

Pro druhý diferenciál dostaneme derivováním rovnici:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(2z + 8x - 1) + \frac{\partial z}{\partial x}(2\frac{\partial z}{\partial x} + 8) = -4 - 8\frac{\partial z}{\partial x}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}(2z + 8x - 1) + \frac{\partial z}{\partial x}(2\frac{\partial z}{\partial y}) = -8\frac{\partial z}{\partial y}\ ,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(2z + 8x - 1) + \frac{\partial z}{\partial y}(2\frac{\partial z}{\partial y}) = -4\ .$$

Odtud vypočteme dosazením za souřadnice bodu (x, y) a uvědomíme si, že $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} = 0$. Je pak

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{4}{2z_{1,2} + 8x_{1,2} - 1}\ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{4}{2z_{1,2} + 8x_{1,2} - 1}\ ; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0\ .$$

Pro bod $A \equiv (-2; 0; 1)$ dostaneme $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(A) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(A) = \frac{2}{17}$ a tedy $d^2z(A) = \frac{2}{17}(dx^2 + dy^2)$. V bodě A má funkce z lokální minimum.

Pro bod $B \equiv (\frac{16}{7}; 0; \frac{-8}{7})$ dostaneme:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(B) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(B) = -\frac{28}{41} \quad \text{a tedy} \quad d^2z(B) = -\frac{28}{41}(dx^2 + dy^2) .$$

V bodě B má funkce z lokální maximum.

10.5. Nalezněte lokální extrémy funkce f vazební podmínky g :

a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2$, $g(x, y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0$;

b) $f(x, y) = xy$, $g(x, y) = x + y - 1 = 0$.

Ř e š e n í : Extrémy nalezneme metodou Lagrangeových multiplikátorů.

a) Položme

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - \lambda(x^2 - 2x + 2y^2 + 4y) .$$

Podmínka $dL = 0$ dává soustavu:

$$\begin{aligned} 2x - \lambda(2x - 2) = 0 &\Leftrightarrow x(1 - \lambda) = -\lambda \\ 4y - \lambda(4y + 4) = 0 &\Leftrightarrow y(1 - \lambda) = +\lambda \\ x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0 \quad & x = \frac{-\lambda}{1 - \lambda},\ y = \frac{+\lambda}{1 - \lambda} \end{aligned} \qquad (*)$$

Dosadíme do třetí rovnice a získáme rovnici pro parametr λ :

$$\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{2\lambda}{1-\lambda} + 2\frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2} + \frac{4\lambda}{(1-\lambda)^2} = 0 \Rightarrow 3\lambda^2 + 6\lambda(1-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_1 = 2;\ \lambda_2 = 0} .$$

Dostáváme dva stacionární body: $A \equiv (2; -2)$; $\lambda_1 = 2$; $B \equiv (0; 0)$, $\lambda_2 = 0$.
Dále je

$$d^2L(x, y, \lambda) = 2(1 - \lambda)dx^2 + 4(1 - \lambda)dy^2 .$$

Pro bod A je $d^2L(A, \lambda_1) = -2dx^2 - 4dy^2 < 0$, funkce má lokální maximum.
V bodě B je $d^2L(B, \lambda_2) = 2dx^2 + 4dy^2 > 0$, funkce má lokální minimum.

b) Položme

$$L(x, y, \lambda) = xy - \lambda(x + y - 1) .$$

Pro stacionární bod dostáváme soustavu:

$$\begin{aligned} y - \lambda = 0 \quad & x + y = 2\lambda = 1 \\ x - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad & \lambda = \tfrac{1}{2},\ x = y = \tfrac{1}{2} . \\ x + y = 1 \quad & \end{aligned}$$

Získali jsme jediný stacionární bod $A \equiv (\frac{1}{2} ; \frac{1}{2})$ pro $\lambda = \frac{1}{2}$. Dále máme $d^2L(x, \lambda) = 2dxdy$. Pro tečný prostor v bodě A dostaneme rovnici: $dx + dy = 0 \Rightarrow dy = -dx$. Na tomto podprostoru dostaneme $d^2L = -2dx^2 < 0$, funkce $f(x, y)$ má v bodě A lokální maximum.

10.6. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ za podmínky $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Ř e š e n í : Položíme

$$L(x, y, z; \lambda) = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) .$$

Pro stacionární bod dostáváme soustavu:

$$\begin{aligned} 1 - 2\lambda x &= 0 \\ -2 - 2\lambda y &= 0 \\ 2 - 2\lambda z &= 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 1 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{1}{2\lambda} \\ y &= -\frac{1}{\lambda} \\ z &= \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{9}{4} \Rightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2},\ \lambda_2 = -\frac{3}{2}.$$

Řešením dostáváme dva body: $A \equiv (\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3})$; $\lambda_1 = \frac{3}{2}$ a $B \equiv (-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, $\lambda_2 = -\frac{3}{2}$. Pro druhý diferenciál je $d^2L = -2\lambda dx^2 - 2\lambda dy^2 - 2\lambda dz^2$. V bodě A je $d^2L < 0$, tedy funkce má lokální maximum. V bodě B je $d^2L > 0$, tedy funkce má lokální minimum.

10.7. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ za podmínek $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.

<u>Řešení:</u> Sestrojíme pomocnou funkci

$$L(x, y, z; \lambda, \mu) = xyz - \lambda(x + y + z - 5) - \mu(xy + yz + xz - 8).$$

Pro stacionární body dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} yz - \lambda - \mu(y + z) &= 0 \qquad & xy + xz + zy &= 8 \\ xz - \lambda - \mu(x + z) &= 0 & x + y + z &= 5 \\ xy - \lambda - \mu(y + x) &= 0 \end{aligned}$$

Sečteme-li rovnice, dostaneme $xy + yz + xz - 3\lambda - 2\mu(x + y + z) = 0 \Rightarrow$ $8 - 3\lambda - 10\mu = 0$. Odečteme-li každé ze dvou rovnic, dostaneme z řešené soustavy soustavu

$$\begin{aligned} (x - y)(z - \mu) &= 0 \\ (y - z)(x - \mu) &= 0 \\ (z - x)(y - \mu) &= 0 \end{aligned}$$

Uvážíme-li první rovnici, musí být $x = y = \mu$, $x + y + z = 5$ a $xy + xz + zy = 8$. Tedy $z = 5 - 2x$ a dále $3x^2 - 10x + 8 = 0$. Odtud dostaneme: $x_1 = y_1 = 2$, $z_1 = 1$; $x_2 = y_2 = \frac{4}{3}$, $z_2 = \frac{7}{3}$; $\lambda_1 = -4$, $\mu_1 = 2$; $\lambda_2 = -\frac{16}{9}$, $\mu_2 = \frac{4}{3}$.

Uvážíme-li, že řešené rovnice jsou symetrické, dostaneme stacionární body:

$A_1 \equiv (2; 2; 1)$, $A_2 \equiv (2; 1; 2)$, $A_3 \equiv (1; 2; 2)$; $\lambda_1 = -4$; $\mu_1 = 2$;
$B_1 \equiv (\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3})$, $B_2 \equiv (\frac{4}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{3})$, $B_3 \equiv (\frac{7}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3})$; $\lambda_2 = -\frac{16}{9}$, $\mu_2 = \frac{4}{3}$.

Pro druhý diferenciál máme vyjádření:

$$d^2L = 2(z - \mu)dxdy + 2(y - \mu)dxdz + 2(x - \mu)dydz$$

a pro tečný prostor ve stacionárních bodech dostaneme soustavu:

$$\begin{aligned} dx + dy + dz &= 0 \\ (y + z)dx + (x + z)dy + (x + y)dz &= 0. \end{aligned}$$

Je patrné, že stačí provést výpočet pro body A_1 a B_1 pro ostatní body dostaneme hodnoty stejné.

V bodě A_1 platí: $d^2L = -2\,dxdy$;

$$\begin{aligned} dx + dy + dz &= 0 \\ 3dx + 3dy + 4dz &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} dz &= 0 \\ dy &= -dx. \end{aligned}$$

Tedy $d^2L(A_1) = 2dx^2 > 0$ a funkce f má v bodech A_1, A_2, A_3 lokální minima.

V bodě B_1 platí: $d^2L = 2\,dxdy$;

$$\begin{aligned} dx + dy + dz &= 0 \\ \frac{11}{3}dx + \frac{11}{3}dy + \frac{8}{3}dz &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} dz &= 0 \\ dy &= -dx \,. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že $d^2L(B_1) = -2dx^2 < 0$ a funkce f má v bodech B_1, B_2, B_3 lokální maxima.

10.8. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = 3xy$ na množině $M = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq 2\}$.

<u>Řešení:</u> Funkce f je spojitá a diferencovatelná a množina M je kompaktní. Nabývá tedy svého maxima a minima.

1) Lokální extrémy ve vnitřních bodech:

$$\text{grad } f = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 3y = 0\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x = 0\,.$$

Existuje stacionární bod $A \equiv (0; 0)$.

2) Lokální extrémy na hranici $x^2 + y^2 = 2$

$$L(x, y, \lambda) = 3xy - \lambda(x^2 + y^2 - 2)\,.$$

Pro stacionární body dostaneme:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3y - 2\lambda x = 0\,;\quad \frac{\partial L}{\partial y} = 3x - 2\lambda y = 0,\ x^2 + y^2 = 2\,.$$

Je nutně $x, y \neq 0$, neboť jinak $x = 0 \Leftrightarrow y = 0$ a takový bod na hranici neleží. Eliminací z prvních dvou rovnic dostaneme:

$$\frac{3}{2} = \lambda\frac{x}{y}\,,\quad \frac{3}{2} = \lambda\frac{y}{x} \Rightarrow 1 = \frac{x^2}{y^2} \Leftrightarrow x^2 = y^2\,.$$

Dosadíme do rovnice $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$. Dostáváme další stacionární body: $B \equiv (1; 1)$, $C \equiv (1; -1)$, $D \equiv (-1; -1)$, $E \equiv (-1; 1)$.

Porovnáním hodnot dostaneme: $f(A) = 0$; $f(B) = f(D) = 3$; $f(C) = f(E) = -3$.

Je tedy $\max\{f(x);\ x \in M\} = 3$, $\min\{f(x);\ x \in M\} = -3$.

10.9. Stanovte největší na nejmenší hodnotu funkce $f(x, y) = x^2 - y^2$ na množině $M = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \leqq 1\}$.

<u>Řešení:</u> Pro lokální extrémy funkce $f(x, y)$ dostaneme podmínku: $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y = 0$. Dostaneme stacionární bod $A \equiv (0; 0)$.

Pro body hranice dostaneme parametrizaci $x = \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Potom je $h(t) = f(x, y) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos 2t$.

Pro stacionární body funkce $h(t)$ dostaneme:

$$h'(t) = -2\sin 2t = 0 \Rightarrow 2t = k\pi \Rightarrow t = k\frac{\pi}{2}\,,\ k = 1, 2, 3.$$

Máme stacionární body $t_1 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = \pi$, $t_3 = \frac{3\pi}{2}$ a krajní body $t_0 = 0$, $t_4 = 2\pi$. Porovnáním hodnot dostaneme:

$$f(A) = 0\,;\ h(t_0) = h(t_4) = 1\,;\ h(t_1) = h(t_3) = -1;\ h(t_2) = 1.$$

Je tedy $\max\{f(x)\,;\ x \in M\} = 1 = f(1, 0) = f(-1; 0)$ a $\min\{f(x);\ x \in M\} = -1 = f(0, 1) = f(0, -1)$.

10.10. Stanovte největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x, y) = x^2 + 2xy - 4x + 8y$$

na množině $M = \{(x, y) ; 0 \leqq x \leqq 1 , 0 \leqq y \leqq 2\}$.

Ř e š e n í : Pro lokální extrémy uvnitř množiny M dostaneme:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y - 4 = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 8 = 0 \Rightarrow x = -4; \ y = 6$$

a tento bod neleží v množině M^0.

Hranici musíme rozdělit na čtyři úsečky a čtyři body:

$f(0, y) = g_1(y) = 8y$ je rostoucí v intervalu $\langle 0, 2\rangle$ a nemá tedy lokální extrém;

$f(1, y) = g_2(y) = 1 + 2y - 4 + 8y = 10y - 3$ je také rostoucí v intervalu $\langle 0, 2\rangle$;

$f(x, 0) = h_1(x) = x^2 - 4x$, $x \in (0, 1)$. Pro stacionární bod je $h_1'(x) = 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ a tento bod leží vně intervalu $(0, 1)$;

$f(x, 2) = x^2 + 16$ je rostoucí v intervalu $(0, 1)$. Porovnáme tedy hodnoty ve zbývajících bodech hranice (vrcholech obdélníka). Je $f(0, 0) = 0$; $f(1, 0) = -3$; $f(0, 2) = 16$; $f(1, 2) = 17$. Je tedy $\max\{f(x); x \in M\} = 17$; $\min\{f(x); x \in M\} = -3$.

N e ř e š e n é ú l o h y

10.1'. Naleznĕte lokální extrémy funkcí:

a) $f(x, y) = x^3 + 8y^3 - 6xy + 5$;

b) $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$;

c) $f(x, y) = x^2 - (y - 1)^2$;

d) $f(x, y) = x^3y^2(12 - x - y)$ pro $x > 0$, $y > 0$;

e) $f(x, y) = 3x^2y - 6xy + y^3$;

f) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$;

g) $f(x, y) = x^2y(4 - x + y)$;

h) $f(x, y) = 6xy - x^3 - y^3$.

[a) $A = (0, 0)$ není extrém, $B \equiv (1; \frac{1}{2})$ lokální minimum, b) $A \equiv (-4; 1)$ lokální minimum; c) $A \equiv (0; 1)$ neexistuje extrém; d) $A \equiv (6; 4)$ lokální maximum; e) $A \equiv (0, 0)$, $B \equiv (2, 0)$ není extrém, $C \equiv (1, 1)$ lokální minimum, $D \equiv (1, -1)$ lokální maximum; f) $A \equiv (0; 0)$ lokální maximum, $B \equiv (\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $C \equiv (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ lokální minimum; g) $A \equiv (0, y)$, $B \equiv (4; 0)$ není extrém, $C \equiv (2; -1)$ lokální minimum; h) $A \equiv (0; 0)$ není extrém, $B \equiv (2; 2)$ lokální maximum.]

10.2'. Naleznĕte lokální extrémy funkce $y(x)$, která je řešením rovnice:

a) $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 9 = 0$;

b) $x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y = 0$;

c) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

[a) $x = 4$; $y_1(4) = 3$ maximum, $y_2(4) = 1$ minimum; b) $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$ maximum $y = \frac{4}{\sqrt{3}} - 2$; $x = \frac{-2}{\sqrt{3}}$ minimum $y = -\frac{4}{\sqrt{3}} - 2$; c) $x = \sqrt[3]{2}$ maximum $y = \sqrt[3]{4}$.]

10.3'. Nalezněte lokální extrémy funkce:

a) $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^2 - 3(xy + xz + yz)$;

b) $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 2z - xy - xz$.

[a) $A \equiv (0; 0; 0)$ není extrém, $B \equiv (2; 2; 2)$ lokální minimum;
b) $A \equiv (2; 1; 7)$ není extrém.]

10.4'. Nalezněte lokální extrémy funkce $z(x, y)$, která je řešením rovnice:

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$.

[a) stacionární bod $A \equiv (1; -1; 6)$ lokální maximum, stacionární bod $B \equiv (1; -1; -2)$ lokální minimum; b) v bodě $A \equiv (-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1)$ lokální maximum.]

10.5'. Je dáno n bodů $A_1 \equiv (x_1; y_1; z_1), \ldots, A_n \equiv (x_n, y_n, z_n) \in \mathbb{R}^3$. V rovině $z = 0$ najděte bod A, pro který je součet čtverců vzdáleností od bodů $A_1, A_2, \ldots, A_n$ minimální.

[$A \equiv \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i ; \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i; 0\right)$.]

10.6'. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ za podmínky $x + y = 1$.

[V bodě $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ lokální minimum.]

10.7'. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = xy$ za podmínky $x^2 + y^2 = 2$.

[V bodech $A \equiv (1; 1)$, $B \equiv (-1; -1)$ lokální maximum; v bodech $C \equiv (-1, 1)$, $D \equiv (1; -1)$ lokální minimum.]

10.8'. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y, z) = xyz$ za podmínky $x + y + z = 3$.

[V bodě $A \equiv (1; 1; 1)$ lokální maximum.]

10.9'. Nalezněte lokální extrémy funkce f za podmínek:

a) $f(x, y, z) = xy + yz$; $x^2 + y^2 = 2$, $y + z = 2$;

b) $f(x, y, z) = xyz$; $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x + y + z = 0$.

[a) V bodě $A \equiv (1; 1; 1)$ lokální maximum; v bodě $B \equiv (-1; 1; 1)$ lokální minimum.

b) V bodech $A_1 \equiv (2\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}})$, $A_2 \equiv (-\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}})$,

$A_3 \equiv (\frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{-1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}})$ lokální maxima; v bodech $B_1 \equiv (\frac{-2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}})$,

$B_2 \equiv (\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}})$; $B_3 \equiv (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{-2}{\sqrt{6}})$ lokální minima.]

10.10´. Nalezněte lokální extrém funkce $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ za podmínky $xyz = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

[V bodě $A \equiv (1; 1; 1)$ lokální minimum.]

10.11´. V rovině $3x - 2z = 0$ nalezněte bod, který má minimální součet čtverců vzdáleností od bodů $A \equiv (1; 1; 1)$ a $B \equiv (2; 3; 4)$.

[Minimum v bodě $P \equiv (\frac{21}{13}, 2, \frac{63}{26})$.]

10.12´. Určete body elipsy $x^2 + 4y^2 = 4$, které mají minimální a maximální vzdálenost od přímky $2x + 3y - 6 = 0$.

[$A \equiv (\frac{8}{5}; \frac{3}{5})$ minimální vzdálenost; $B \equiv (-\frac{8}{5}; -\frac{3}{5})$ maximální vzdálenost.]

10.13´. Bodem $P \equiv (a; b; c)$ veďte rovinu tak, aby objem čtyřstěnu vymezeného touto rovinou a souřadnicovými rovinami byl minimální.

[Rovnice roviny $\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} + \frac{z}{2c} = 1$, $V_{min} = \frac{9}{2} abc$.]

10.14´. Do elipsy $x^2 + 3y^2 = 12$ vepište rovnoramenný trojúhelník takový, že má základnu rovnoběžnou s osou x a má maximální obsah.

[Vrcholy trojúhelníka $A \equiv (3; -1)$, $B \equiv (-3; -1)$, $C = (0, 2)$. Obsah je 9.]

10.15´. Určete rozměry obdélníka daného obvodu $2p$, který rotací kolem jedné strany vytvoří těleso s maximálním objemem.

[Rozměry stran $\frac{p}{3}$, $\frac{2p}{3}$. Objem $V = \frac{4\pi p^2}{3}$.]

10.16´. Určete rozměry pravoúhlého odkrytého bazénu, který má při daném objemu V minimální povrch.

[Rozměry: $x = y = \sqrt[3]{2V}$, $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$; povrch $P = 3\sqrt[3]{4V^2}$.]

10.17´. V rovině $z = 0$ určete bod D tak, aby koule, která prochází body $A \equiv (0; 0; 12)$, $B \equiv (0; 0; 4)$, $C \equiv (8; 0; 8)$ a D měla minimální objem.

[$D \equiv (3; \pm\sqrt{39}, 0)$.]

10.18´. Do rotačního kužele o délce površky 1 a vrcholovém úhlu $\frac{\pi}{2}$ vepište kvádr maximálního objemu.

[Rozměry základny: $x = y = \frac{2}{3}$, výška $z = \frac{\sqrt{2}}{6}$; $V = \frac{2\sqrt{2}}{27}$.]

10.19´. Do koule o poloměru R vepište válec o maximálním povrchu.

[Poloměr válce $r = R\sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$, výška válce $h = 2R\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$.]

10.20'. Jsou dány body $A \equiv (4;\ 0;\ 4)$, $B \equiv (4;\ 4;\ 4)$, $C \equiv (4;\ 4;\ 0)$ a koule $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Nalezněte bod P ležící na dané kouli takový, aby objem jehlanu o vrcholech A, B, C, P byl maximální a minimální.

[minimum ~~Maximum~~ pro bod $P_1 \equiv (2;\ 0;\ 0)$, maximum ~~minimum~~ pro bod $P_2 \equiv (-2;\ 0;\ 0)$.]

10.21'. Nalezněte minimální vzdálenost bodu $A \equiv (1;\ 4)$ od paraboly dané rovnicí $y^2 = 2x$.

[Minimum nastává pro bod $(2;\ 2)$ a $v = \sqrt{5}$.]

10.22'. Určete největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 12x + 16y$$

na množině $M = \{(x, y),\ x^2 + y^2 \leq 25\}$.

[Maximum $f(-3, 4) = 125$; minimum $f(3, -4) = -75$.]

10.23'. Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x, y) = 2x^3 + 4x^2 + y^2 - 2xy$$

na množině $M = \{(x, y);\ x^2 \leq y \leq 4\}$.

[Maximum $f(-2, 4) = f(2, 4) = 32$; minimum $f(0, 0) = 0$.]

10.24'. Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x, y) = x^2 y(4 - x - y)$$

na množině $M = \{(x, y);\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 6\}$.

[Maximum $f(2, 1) = 4$; minimum $f(4, 2) = -64$.]

10.25'. Nalezněte největší a nejmenší hodnotu funkce

$$f(x, y) = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$$

na množině $M = \{(x, y);\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

[Maximum $f(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}) = \frac{3}{2}\sqrt{3}$; minimum $f(0, 0) = 0$.]