3. LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

3.1-D. Nechť f je zobrazení množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Říkáme, že funkce f má v bodě $a \in A$ limitu $b \in \mathbb{R}^m$, jestliže a je hromadným bodem množiny A a k libovolnému okolí $U(b)$ bodu b v $\mathbb{R}^m$ existuje okolí $U(a)$ bodu a v $\mathbb{R}^n$ takové, že pro každé $x \in \mathbb{R}^n$ platí:

$$x \in U(a) \cap A \Rightarrow f(x) \in U(b) .$$

Tuto skutečnost zapisujeme $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

3.2-D. Nechť f je zobrazení množiny $A \subset \mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^m$. Říkáme, že je spojité v bodě $a \in A$, jestliže k libovolnému okolí $U(b)$ bodu $b = f(a) \in \mathbb{R}^m$ existuje takové okolí $U(a)$ bodu a v $\mathbb{R}^n$, že platí:

$$x \in U(a) \cap A \Rightarrow f(x) \in U(b) .$$

Je-li zobrazení f spojité v každém bodě množiny A, říkáme, že je spojité na množině A. Je-li spojité na celém svém definičním oboru, pak stručněji říkáme, že je spojité.

3.3. Poznámka. O limitě a spojitosti zobrazení v $\mathbb{R}^n$ platí obdobné věty jako pro funkce jedné reálné proměnné. Jsou to zejména vlastnosti součtu, součinu, podílu a kompozice funkcí.

Řešené úlohy

3.1. Určeme $\lim\limits_{(x,y) \to (2,4)} 2x + 3y$.

Řešení: Funkce $2x$ a $3y$ jsou spojité jako funkce jedné proměnné a tudíž jsou spojité i v $\mathbb{R}^2$. Limita se tedy bude rovnat funkční hodnotě, tj. 16. Dokažme to podle definice 3.1. Je

$$|2x + 3y - 16| = |2(x - 2) + 3(y - 4)| \leqq 2|x - 2| + 3|y - 4|.$$

Zvolme $\varepsilon > 0$ libovolně. Pak pro δ-okolí bodu $(2, 4)$, kde $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, platí: Je-li (x, y) z δ-okolí bodu $(2, 4)$, je $|x - 2| < \delta$ a $|y - 4| < \delta$ tudíž

$$|2x + 3y - 16| < 2\delta + 3\delta = 5\delta = \varepsilon .$$

Limita je tedy rovna 16.

3.2. Určeme $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

Řešení: Funkce je podílem spojitých funkcí a dosazením dostaneme v čitateli i jmenovateli nulu. Nelze tedy použít věty o limitě podílu a proto vyjádření funkce vhodně rozšíříme.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2+1-1} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2+1}+1 = 2 .$$

3.3. Určeme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$.

Ř e š e n í : Je $(x-y)^2 \geqq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geqq 2xy \Rightarrow x^2+y^2 \geqq 2|xy|$. Tedy platí $\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right| \leqq \left|\dfrac{x^2y}{2xy}\right| = \dfrac{|x|}{2}$. Protože je $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{2} = 0$, je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{|x|}{2} = 0$

a tedy i $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} = 0$.

3.4. Určeme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x})$.

Ř e š e n í : Funkce je definována na množině $A = \{(x, y): x \neq 0, y \neq 0\}$. Pro všechny body $(x, y) \in A$ platí

$$\left|x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}\right| \leqq |x|\left|\sin \frac{1}{y}\right| + |y|\left|\sin \frac{1}{x}\right| \leqq |x| + |y| .$$

Protože je $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |x| + |y| = 0$ a bod $(0, 0)$ je hromadným bodem množiny A, je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} = 0 .$$

3.5. Určeme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$.

Ř e š e n í : Má-li mít funkce v bodě limitu, musí mít tuto limitu, jestliže se k bodu $(0, 0)$ blížíme po libovolné přímce. V tomto případě je pro body $(x, 0)$:

$$\lim_{x\to 0_+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0_-} e^{\frac{1}{x}} = -\infty .$$

Limita tedy neexistuje.

3.6. Určete $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$.

Ř e š e n í : Funkce je definována pro všechny body v $\mathbb{R}^2$ s výjimkou bodů přímky $y = x$. Spočtěme limitu funkce po přímkách $y = kx$, $k \neq 1$. Je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(1+k)}{x(1-k)} = \frac{1+k}{1-k}$$

a tedy funkce limitu nemá.

3.7. Určeme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$.

Ř e š e n í : Vyšetříme limity funkce po přímkách $y = kx$, $x \to 0$. Je

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x^3(1+k^3)}{x^2(1+k^2)} = \frac{1+k^3}{1+k^2} \lim_{x\to 0} x \frac{\sin x^3(1+k^3)}{x^3(1+k^3)} = \frac{1+k^3}{1+k^2} \lim_{x\to 0} x .$$

$$\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^3(1+k^3)}{x^3(1+k^3)} = \frac{1+k^3}{1+k^2} \cdot 0 \cdot 1 = \underline{0}\,.$$

Abychom ukázali, že je limita rovna nule, zavedeme v $\mathbb{R}^2$ souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ a odhadneme chování funkce pro $\rho \to 0$ nezávisle na úhlu φ. Tím vlastně najdeme v $\mathbb{R}^2$ okolí bodu $(0, 0)$, které se zobrazí do okolí limity. Je

$$\left|\frac{\sin\rho^3(\cos^3\varphi + \sin^3\varphi)}{\rho^2}\right| \leq \frac{2\rho^3}{\rho^2} = 2\rho$$

a $\lim\limits_{\rho\to 0} 2\rho = 0$. Je tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2} = 0\,.$$

3.8. Určeme $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4}\, e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

Ř e š e n í : Zavedeme opět polární souřadnice $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Dostaneme

$$\lim_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^4(\cos^4\varphi + \sin^4\varphi)}\, e^{-\frac{1}{\rho^2}}\,.$$

Odhadneme chování funkce v závislosti na $\varphi \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Funkce $\cos^4\varphi + \sin^4\varphi$ je v tomto intervalu spojitá a nabývá svého minima $m = \frac{1}{2}$ (pro $\varphi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$). Je tedy

$$0 < \frac{1}{x^4+y^4}\, e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\,\frac{1}{\rho^4}\, e^{-\frac{1}{\rho^2}}\,.$$

Dále je $\lim\limits_{\rho\to 0_+} \frac{1}{\rho^4}\, e^{-\frac{1}{\rho^2}} = \lim\limits_{r\to+\infty} r^2 e^{-r} = \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{r^2}{e^r} = \lim\limits_{r\to+\infty} \frac{2r}{e^r} = \lim\limits_{r\to+\infty} 2e^{-r} = 0$, kde jsme použili věty o limitě složené funkce a L'Hospitalova pravidla. Je tedy

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{x^4+y^4}\, e^{-\frac{1}{x^2+y^2}} = 0\,.$$

3.9. Rozhodněme, zda je funkce $f(x, y) = e^{\frac{\sin x}{y}}$ spojitá a zda ji lze dodefinovat v celém $\mathbb{R}^2$ tak, aby byla spojitá všude.

Ř e š e n í: Funkce je definována v $\mathbb{R}^2$ s výjimkou bodů, kde je $y = 0$, tj. osy bodů osy x . Na této množině je funkce spojitá, neboť $\sin x$ a y jsou funkce spojité, jejich podíl také a exponenciální funkce je spojitá všude. Podle věty o spojitosti složené funkce je $f(x, y)$ spojitá v $A = \{(x, y): y \neq 0\}$. Abychom mohli dodefinovat funkci $f(x, y)$ v $\mathbb{R}^2 - A$, musela by mít v každém bodě $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ limitu. Je-li $(x, 0)$, $x \neq k\pi$ libovolné, je

$$\lim_{y\to 0_+} \frac{\sin x}{y} \neq \lim_{y\to 0_-} \frac{\sin x}{y}$$

a obě limity jsou nevlastní. Funkce $f(x, y)$ tedy nemá v žádném bodě osy x limitu a tudíž ji nelze dodefinovat jako spojitou na větší množině.

3.10. Rozhodněte, zda funkce $f(x, y) = \frac{\sin xy}{y}$ je spojitá a zda ji můžeme dodefinovat v $\mathbb{R}^2$ tak, aby byla spojitá.

Řešení: Funkce f je spojitá na celém definičním oboru, tj. v $\{(x, y): y \neq 0\}$. Je-li $(x_0, 0)$ libovolný bod, je pro $x_0 \neq 0$

$$\frac{\sin xy}{y} = x \frac{\sin xy}{xy} \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} \frac{\sin xy}{y} = \lim_{(x,y)\to(x_0,0)} x \frac{\sin xy}{xy} = x_0 .$$

Pro bod $(0, 0)$ je

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\sin xy}{y}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|yx|}{|y|} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| = 0 .$$ Je tedy funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin xy}{y} & ; y \neq 0 \\ x & ; y = 0 \end{cases}$$

spojitá v $\mathbb{R}^2$.

3.11. Pojem limity a spojitosti lze zavést zcela obdobně pro zobrazení v libovolném metrickém prostoru. Uveďme alespoň pro nás nejdůležitější pojem limity posloupnosti.

3.5-D. Nechť x_n je posloupnost bodů v metrickém prostoru (P, ρ). Říkáme, že posloupnost $\{x_n\}$ má v (P, ρ) limitu $x \in P$, jestliže k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje index $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n \in N$, $n \geq n_0$ je $\rho(x_n, x) < \varepsilon$.

Tuto skutečnost zapisujeme $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, nebo $x_n \to x$ v P $(n \to \infty)$.

Je-li L lineární normovaný prostor, pak $x_n \to x$ v $L \Leftrightarrow \|x_n - x\| \to 0$ v $\mathbb{R}$ $(n \to \infty)$.

3.12. Buď $f_n(t) = 1 - t^n$, $n \in N$ posloupnost v $C(\langle 0, 1 \rangle)$, $L_C(\langle 0, 1 \rangle)$ a $L_C^2(\langle 0, 1 \rangle)$. Určete $\lim_{n\to\infty} f_n$. (Viz 1.9, 12, 13).

Řešení: a) Pro každé $n \in N$ je funkce $f_n(t) = 1 - t^n$ spojitá a tedy patří do prostoru $C(\langle 0, 1 \rangle)$. Pro její limitu $f(t)$ musí platit

$$\max\{|f_n(t) - f(t)|;\ t \in \langle 0, 1 \rangle\} \to 0 \ (n \to \infty)$$

a tedy

$$f(t) = \lim_{n\to\infty} f_n(t), \quad t \in \langle 0, 1 \rangle .$$

Je tudíž $f(t) = \lim_{n\to\infty}(1 - t^n) \Rightarrow f(t) = 1,\ t \in \langle 0, 1),\ f(1) = 0$.

Funkce $f(t)$ není spojitá a tedy posloupnost $\{1 - t^n\}$ nemá v $C(\langle 0, 1 \rangle)$ limitu.

b) Pro $f(t) = 1$ je v $L_C(\langle 0, 1 \rangle)$

$$\|f_n(t) - f(t)\| = \int_0^1 t^n \, dt = \frac{1}{n+1} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

a tedy

$$\lim_{n\to\infty} 1 - t^n = 1 \quad v \quad L_C(\langle 0, 1 \rangle) .$$

c) Zcela obdobně dostaneme, že $\lim_{n\to\infty} 1 - t^n = 1$ v $L_C^2(\langle 0, 1 \rangle)$, neboť

$$\|1 - t^n - 1\|^2 = \int_0^1 t^{2n}dt = \frac{1}{2n+1} \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0 .$$

3.13. Poznámka. Konvergence v prostoru $C(\langle a, b\rangle)$ se nazývá stejnoměrná a je zřejmé, že ve skutečnosti

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad v \quad C(\langle a, b\rangle)$$

plyne i fakt, že

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \quad v \quad L_C(\langle a, b\rangle) \quad a \quad L_C^2(\langle a, b\rangle) ,$$

neboť

$$\int_a^b |g(t)|dt \leq (b - a) \max\{g(t) \; ; \; t \in \langle a, b\rangle\} .$$

3.14. Ukažme, že $\sin \frac{t}{n} \to 0 \; (n \to \infty)$ v $C(\langle 0, \pi\rangle)$, $L_C(\langle 0, \pi\rangle)$ a $L_C^2(\langle 0, \pi\rangle)$.

Řešení: Pro $n = 1, 2$ je $\max\{|\sin \frac{t}{n}| , t \in \langle 0, \pi\rangle\} = 1$. Pro $n \geq 3$ je $\max\{|\sin \frac{t}{n}|; t \in \langle 0, \pi\rangle\} = \sin \frac{\pi}{n}$, neboť je funkce $\sin \frac{t}{n}$ rostoucí v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Protože je $\lim_{n\to\infty} \sin \frac{\pi}{n} = 0$, je $\sin \frac{t}{n} \to 0$ v $C(\langle 0, 1\rangle)$. Podle 3.13 anebo přímým výpočtem dokážeme zbývající část tvrzení.

Neřešené úlohy

3.1'. Spočtěte limitu funkce

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{xy + 1} - 1}{x + y}$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x + y)^2}{x - y}$;

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2 + xy^2}{x^2 + y^2}$;

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x - y)}{4x^2 - 3y^2}$;

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1 + xy)^{\frac{1}{x+y}}$;

f) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,1,0)} \frac{\sin xy^2z^2}{xyz}$;

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x - 1)^2 + y^2}{|x - 1| + |y|}$;

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} (x + y)\sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$;

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2+y^2} - 1}{|x| + |y|}$.

[a) neexistuje; b) neexistuje; c) 1; d) 0; e) neexistuje; f) 0; g) 0; h) $3 \sin 1 \sin \frac{1}{2}$; i) 0.]

3.2'. Rozhodněte, zda je funkce f spojitá:

a) $f(x, y) = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$;

b) $f(x, y) = \sin \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2 - y^2}}$;

c) $f(x, y) = \arcsin \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$; $f(0, 0) = 0$

d) $f(x, y) = \cos \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2}$; $f(0, 0) = 1$

e) $f(x, y, z) = \frac{x + y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$; f) $f(x, y, z) = e^{\frac{1}{x+y+z}}$;

$f(0, 0, 0) = 0$ $f(x, y, z) = 1$ pro $x + y + z = 0$.

[a) ano v $\mathbb{R}^2$; b) ano pro $y^2 - x^2 < 1$; c) v $\mathbb{R}^2 - \{0, 0\}$;
d) ano v $\mathbb{R}^2$; e) v $\mathbb{R}^3 - \{0, 0, 0\}$; f) v $\mathbb{R}^3$ kromě bodů roviny
$x + y + z = 0$.]

3.3´. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{n}$ v $C(\langle -\pi, \pi \rangle)$; $L_C(\langle -\pi, \pi \rangle)$.

[Limita je rovna 0.]

3.4´. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg} nx$ v $C(\langle 0, 1 \rangle)$ a v $L_C(\langle 0, 1 \rangle)$.

[Limity neexistují.]

3.5´. Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln nx}{n}$ v $C(\langle 1, 2 \rangle)$ a v $L_C(\langle 1, 2 \rangle)$.

[Limity jsou rovny 0.]