Poznámky k limitám

Věta 0.1. ***(o limitě sevřené funkce)***

Nechť f_1, f_2 a f jsou reálné funkce (na vhodných definičních oborech, které jsou částí $\mathbb{R}^n$). Pokud pro $a_0 \in \mathbb{R}^n$ a nějaké jeho prstencové okolí $P_\varepsilon(a_0)$ platí, že

- $f_1(a) \leq f(a) \leq f_2(a)$ *pro všechna* $a \in P_\varepsilon(a_0) \cap D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ *a*
- $\lim\limits_{a \to a_0} f_1(a) = \lim\limits_{a \to a_0} f_2(a) = c \in \mathbb{R}$,

pak $\lim\limits_{a \to a_0} f(a) = c$.

Věta 0.2. ***(o limitě složeného zobrazení)***

Mějme složené zobrazení

$$\begin{array}{ccccc} D(g) & \xrightarrow{g} & D(f) & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^m \\ \cap\!\shortmid & & \cap\!\shortmid & & \\ \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^k & & \end{array}$$

a nechť $a_0 \in \mathbb{R}^n$ je hromadný bod definičního oboru $D(g)$ $\Big(= D(f \circ g)\Big)$.

Pokud nyní existují body $b_0 \in \mathbb{R}^k$ a $c_0 \in \mathbb{R}^m$ takové, že

$$\lim_{a \to a_0} g(a) = b_0 \quad a \quad \lim_{b \to b_0} f(b) = c_0$$

a pokud je splněna alespoň jedna z následujících podmínek

- *existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(a_0)$, že $g\Big(P_\varepsilon(a_0) \cap D(g)\Big)$ neobsahuje bod b_0 nebo*
- *funkce f je v bodě b_0 spojitá,*

pak $\lim\limits_{a \to a_0} f\left(g(a)\right) = c_0$.

Věta 0.3. ***(o použití polárních souřadnic)***

Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$ a bod $a_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ je hromadným bodem definičního oboru $D(f)$. Nechť existuje prstencové okolí $P_\varepsilon(a_0)$, hodnota $c \in \mathbb{R}$ a funkce g z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ taková, že

$$\Big| f\big(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi\big) - c \Big| \leq g(r)$$

pro všechna $r \in (0, \varepsilon)$ a $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Jestliže $\lim\limits_{r \to 0_+} g(r) = 0$, pak $\lim\limits_{a \to a_0} f(a) = c$.

Věta 0.4. ***(postačující podmínka pro neexistenci limity)***

Nechť h, g jsou funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$, které jsou spojité v nějakém okolí $U_\varepsilon(a_0)$ bodu $a_0 \in \mathbb{R}^n$ a dále platí:

- *bod a_0 je hromadný bod definičního oboru $D\big(\frac{h}{g}\big)$ funkce $\frac{h}{g}$.*
- *existuje množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že*
  - *(i) a_0 je hromadný bod množiny M,*
  - *(ii) pro každé $a \in M$ je $h(a) \neq 0$ a $g(a) = 0$.*

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{a \to a_0} \frac{h(a)}{g(a)}$.

Typické použití věty o neexistenci limity:

Množina M je nějaká křivka, která prochází bodem a_0 taková, že funkce g se na ní vynuluje, zatímco funkce h se na téhle křivce nikde nevynuluje (kromě bodu a_0, v němž se snažíme zjistit limitu funkce $\frac{h}{g}$).

Věta 0.5. ***(obecnější verze postačující podmínky pro neexistenci limity)***

Nechť f je funkce z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}$ taková, že platí

- *bod a_0 je hromadný bod definičního oboru $D(f)$ funkce f.*
- *existuje množina $M \subseteq \mathbb{R}^n$ taková, že*
  - *(i) a_0 je hromadný bod množiny M,*
  - *(ii) pro každé $a_1 \in M$ je $\lim\limits_{a \to a_1} |f(a)| = \infty$.*

Pak NEEXISTUJE (konečná) limita $\lim\limits_{a \to a_0} f(a)$.

(Limity rovné $\pm\infty$ sice v případě funkcí více proměnných z definice neuvažujeme, ale v rámci přehlednějšího znění věty a důkazu je na chvíli připustíme.)

Důkaz. V každém okolí $U_\varepsilon(a_0)$ bodu a_0 si vezmeme bod $a_1 \in M$, který k němu bude "dost blízko" (např. aby $\|a_1 - a_0\| < \varepsilon/2$). Protože $\lim\limits_{a \to a_1} |f(a)| = \infty$, musí v okolí $U_{\varepsilon/2}(a_1)$ existovat bod $a_2 \in D(f)$ v němž je hodnota $|f(a_2)|$ dostatečně vysoká (větší než libovolná pevně zvolená mez K, tedy $|f(a_2)| \geq K$). Bod a_2 se ale evidentně nachází i v $U_\varepsilon(a_0)$, protože

$$\|a_2 - a_0\| \leq \|a_2 - a_1\| + \|a_1 - a_0\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \ .$$

V okolí $U_\varepsilon(a_0)$ (voleném libovolně) tak máme bod, kde je hodnota funkce f příliš velká (v absolutní hodnotě). Tudíž funkce f nemůže mít v a_0 konečnou limitu (jinak by musela být už omezená v nějakém okolí a_0.)

$\lim\limits_{a \to a_0} f(a)$ tedy neexistuje (alespoň ne jako konečná limita). □