České vysoké učení technické v Praze
Fakulta elektrotechnická

Neřešené příklady z analýzy funkcí více proměnných

Miroslav Korbelář

Paola Vivi

Praha 2016

Tento dokument byl vytvořen s podporou grantu RPAPS č. 13101/105/1051603C005.

1 Limity funkcí více proměnných

1.1. Určete definiční obor funkcí $f(x,y) = \ln \frac{x^2+2x+y^2}{x^2-2x+y^2}$, $f(x,y,z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

1.2. Určete definiční obor funkcí $f(x,y,z) = \frac{x}{|y+z|}$, $g(x,y) = \sqrt{1-|x|-|y|}$.

1.3. Načrtněte graf funkcí $f(x,y) = x^2+y^2$, $g(x,y) = 4x^2+9y^2$, diskutujte tvar vrstevnic.

1.4. Ukažte, že $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^y \sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x \sin y}{x^2+y} = 0$, $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{2-\sqrt{4-xyz}}{xyz} = \frac{1}{4}$.

1.5. Přibližováním se k počátku různými cestami ukažte, že následující limity neexistují:
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+y^2}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^2}{x^4+y^2}$,
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y-x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^4+y^4}}$.

1.6. Pomocí ε-δ- definice ukažte, že
$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

1.7. Použijte polární souřadnice $x = r\cos\vartheta$, $y = r\sin\vartheta$ k určení limit z předchozích příkladů.

1.8. Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & (x,y) \neq (0,0) \\ c & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ byla všude spojitá. Existenci limity v počátku dokažte pomocí ε-δ-definice.

1.9. Připomeňte si kvadratické povrchy (kvadriky). Načrtněte je pro $a = b = c = 1$:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ elipsoid
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ jednodílný hyperboloid
3. $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ dvoudílný hyperboloid
4. $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ kužel
5. $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ eliptický paraboloid
6. $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ hyperbolický paraboloid
7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ eliptický válec
8. $y = ax^2$ parabolický válec.

2 Parciální derivace, totální diferenciál

2.1. Pro funkci $f(x,y) = \sinh\sqrt{3x+4y}$ určete $D(f)$, f_x, f_y.

2.2. Pro funkci $f(x,y,z) = xy^2z^3\ln(x+2y+3z)$ určete $D(f)$, f_x, f_y, f_z.

2.3. Pro funkci $f(x,y,z) = e^{xy^2} + x^4y^4z^3$ ukažte, že $f_{xy} = f_{yx}$, $f_{xz} = f_{zx}$, $f_{zy} = f_{yz}$. Určete f_{xyz}.

2.4. Je funkce $f(x,y) = x^2 - y^2$ řešením Laplaceovy rovnice $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$?

2.5. Najděte linearizaci funkce $f(x,y,z) = e^x + \cos(y+z)$ v bodě $(0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

2.6. Pro funkci $f(x,y) = \ln(x-3y)$ nalezněte její linearizaci $(x_0,y_0) = (7,2)$. Použijte ji k přibližnému určení hodnoty funkce f v bodě $(6.9, 2.02)$.

2.7. Pro funkci $f(x,y) = xe^{xy}$ nalezněte její linearizaci $(x_0,y_0) = (6,0)$. Použijte ji k přibližnému určení hodnoty funkce f v bodě $(5.9, 0.01)$.

2.8. Určete tečnou rovinu k ploše $z = \ln(2x + y)$ v bodě $(-1, 3, 0)$.

2.9. Ukažte, že funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$,

je spojitá, f_x a f_y existují všude, ale přitom druhé parciální derivace se nerovnají v počátku, tj. $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

2.10. Pro $z = x\sqrt{1+y^2}$, $x = te^{2t}$, $y = e^{-t}$ určete $\frac{dz}{dt}$.

2.11. Pro $z = \sin x \cos y$, $x = (s-t)^2$, $y = s^2 - t^2$ určete $\frac{\partial z}{\partial s}$ a $\frac{\partial z}{\partial t}$.

2.12. Pro $u = xy + yz + zx$, $x = st$, $y = e^{st}$, $z = t^2$ určete $\frac{\partial u}{\partial s}$ a $\frac{\partial u}{\partial t}$.

2.13. Poloměr R kruhového válce klesá rychlostí 1.2 cm/s a současně se jeho výška h zvyšuje rychlostí 3 cm/s. Jakou rychlostí se mění objem válce při $R = 80$ cm a $h = 150$ cm?

2.14. Poloměr R pravoúhlého kruhového kuželu se zvětšuje rychlostí 1.8 cm/s a současně jeho výška h klesá rychlostí 2.5 cm/s. Jakou rychlostí se mění objem a povrch kuželu při $R = 12$ cm a $h = 140$ cm?

2.15. Ukažte, že každá funkce tvaru $h(x,t) = f(x+at) + g(x-at)$, $a \in \mathbb{R}$, je řešením vlnové rovnice $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}$.

2.16. Dokažte, že rovnice $2y^2 + \sqrt[3]{xy} = 3x^2 + 18$ definuje y jako funkci x v okolí bodu $P = (-2, 4)$ a určete $\frac{dy}{dx}\big|_P$ této funkce.

2.17. Pomocí věty o implicitní funkci určete v daném bodě tečnu křivky, která je určená příslušnou rovnicí:
$x^2 - xy + y^4 = 3$, $A = (1, -1)$; $\quad x\cos y + y\cos x = 1$, $B = (1, 0)$,
$2y^2 + + \sqrt[3]{xy} = 3x^2 + 22$, $C = (2, 4)$.

2.18. Vyjádřete Laplaceovu rovnici $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ pomocí polárních souřadnic.

2.19. Vyřešte parciální diferenciální rovnici $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 1$ jejím převedením do polárních souřadnic.

2.20. Určete $\nabla f\big|_P$ pro funkci $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ v bodě $P = (1, 1)$.

2.21. Určete $\nabla f\big|_P$ pro funkci $f(x,y,z) = e^{x+y}\cos z + (y+1)\sin x$ v bodě $P = (0, \pi/2)$.

2.22. Určete $D_{\vec{u}} f\big|_P$ pro funkci $f(x,y,z) = 3e^x \cos(yz)$ v bodě $P = (0,0,0)$ podle vektoru $\vec{v} =< 2, 1, -2 >$.

2.23. Určete $D_{\vec{u}} f\big|_P$ pro funkci $f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2$ v bodě $P = (0,0,0)$ podle vektoru $\vec{v} =< 1, 1, 1 >$.

2.24. Nalezněte tečnou rovinu a normálu k danému povrchu v daném bodě:
$\frac{x^2}{4} + y^2 + \frac{z^2}{9} = 3$ v $P = (-2, 1, -3)$, $\quad x^2 - 2y^2 - 3z^2 + xyz = 4$ v $A = (3, -2, 1)$,
$z + 1 = xe^y \cos z$ v $B = (1, 0, 0)$.

2.25. Ukažte, že elipsoid $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 9$ a sféra $x^2 + y^2 + z^2 - 8x - 6y - 8z + 24$ se dotýkají v bodě $P = (1, 1, 2)$.

2.26. Nalezněte rychlost maximálního a minimálního možného přírůstku (úbytku) funkce $f(x,y) = xe^{-y} + 3y$ v bodě $P = (1, 0)$.

2.27. Nalezněte rychlost maximálního a minimálního možného přírůstku (úbytku) funkce $f(x,y,z) = \frac{x}{y} + \frac{y}{z}$ v bodě $P = (4, 2, 1)$.

3 Lokální, absolutní a vázané extrémy

3.1. Připomeňme, že aproximace druhého řádu funkce $f(\vec{x})$ v bodě $\vec{a}$ je definována jako

$$Q(\vec{x}) = f(\vec{a}) + Df(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a}) + \frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{a})^T Hf(\vec{a})(\vec{x}-\vec{a})$$

pokud parciální derivace funkce f druhého řádu existují a jsou spojité na nějakém okolí bodu $\vec{a}$.
Určete aproximaci druhého řádu funkce $f(x,y) = (1+x^2)e^{x^2+y^2}$ v bodě $\vec{a} = (0,0)$,
a funkce $g(x,y) = xe^y + 1$ v bodě $\vec{a} = (1,0)$.

3.2. Určete lokální maxima, minima a sedlové body funkce $f(x,y) = 6x^2 - 2x^3 + 3y^2 + 6xy$.

3.3. Určete lokální maxima, minima a sedlové body funkce $f(x,y) = 4xy - x^4 - y^4$.

3.4. Určete lokální maxima, minima a sedlové body funkce $f(x,y) = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y$.

3.5. Určete lokální maxima, minima a sedlové body funkce $f(x,y) = \frac{x^2y^2-8x+y}{xy}$.

3.6. Najděte čísla $a \leq b$ tak, aby hodnota $\int_a^b (6 - x - x^2)\,dx$ byla největší možná. Úlohu interpretujte geometricky.

3.7. Nalezněte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2+xy+y^2-6x+2$ ve čtverci $0 \leq x \leq 5$, $-3 \leq y \leq 0$.

3.8. Nalezněte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = 2x^3 + y^4$ v množině $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$.

3.9. Nalezněte absolutní extrémy funkce $f(x,y) = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 11$ v množině $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x \leq 5\}$.

3.10. Teplota zahřáté desky je dána jako $T(x,y) = 4x^2 - 4xy + y^2$. Brouk leze po desce podél kružnice se středem v bodě $(0,0)$ s poloměrem 5. Určete nejteplejší a nejstudenější body na broukově cestě.

3.11. Metodou Lagrangeových multiplikátorů nalezněte maximum a minimum funkce $f(x,y,z) = x + 3y + 5z$ na množině $x^2+y^2+z^2 = 1$. Pak použijte geometrický význam gradientu a faktu, že f je lineární funkce, abyste nalezli řešení úlohy geometricky.

3.12. Nalezněte bod na křivce $xy^2 = 54$, který je nejblíže k počátku.

4 Dvojný integrál

4.1. Spočítejte integrál z funkce $f(x,y) = xe^{(xy)}$ na čtverci $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

4.2. Spočítejte integrál z funkce $f(x,y) = \frac{1}{x+y}$ na čtverci $1 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 1$.

4.3. Načrtněte oblast integrace a vyčíslete integrál $\int_0^1 \int_0^{y^2} 3y^3 e^{xy}\,dx\,dy$.

4.4. Spočítejte $\int_1^{\ln 8} \int_0^{\ln y} e^{x+y}\,dxdy$.

4.5. Spočítejte $\int\int_D \frac{\sin x}{x}\,dxdy$, kde D je trojúhelník s vrcholy $(0,0),(1,0),(1,1)$.

4.6. Změňte pořadí integrace u následujících integrálů

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dxdy, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dydx,$$

$$\int_0^1 \int_0^{x} f(x,y)\,dydx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\,dydx.$$

4.7. Změnou pořadí integrace spočítejte $\int_0^1 \int_x^1 e^{\frac{x}{y}}\,dxdy$.

4.8. Změnou pořadí integrace spočítejte $\int_0^{2\sqrt{\ln 3}} \int_{y/2}^{\sqrt{\ln 3}} e^{x^2}\,dxdy$.

4.9. Přepište integrály nejdříve pomocí změny pořadí integrace a pak transformací do polárních souřadnic:

$$\int_0^1 \int_0^{2-y} f(x,y)\,dxdy,$$

$$\int_0^{2a} \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x,y)\,dydx, \quad a>0.$$

4.10. Pomocí polárních souřadnic spočítejte $\int\int_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, kde D je polovina kruhu se středem v $(0,0)$ a poloměrem 1, který leží nad x-ovou osou.

4.11. Pomocí dvojného integrálu spočítejte obsah kruhu o poloměru 1.

4.12. Načrtněte danou křivku a určete velikost plochy, kterou křivka (zadaná pomocí polárních souřadnic) ohraničuje:

$$\rho=\sin\vartheta, \quad \vartheta\in[0,\pi], \qquad \rho=1+\sin\vartheta, \quad \vartheta\in[0,2\pi],$$

$$\rho=\cos(2\vartheta), \quad \vartheta\in[0,2\pi], \qquad \rho=|\vartheta|+1, \quad \vartheta\in[-\pi,\pi].$$

4.13. Určete velikost plochy, která je ohraničená křivkami zadanými pomocí polárních souřadnic: $\rho=3+2\sin\vartheta$, $\rho=2$.

4.14. Použitím polárních souřadnic spočítejte:

$$\int_0^1 \int_x^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \qquad \int_0^1 \int_0^x \frac{x}{x^2+y^2}\,dydx,$$

$$\int_{-2}^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{x^2-y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \qquad \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \arctan\frac{y}{x}\,dydx,$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dxdy.$$

4.15. Určete objem tělesa ohraničeného rovinou $z=0$ a paraboloidem $z=1-x^2-y^2$.

4.16. Určete objem tělesa ohraničeného rovinou $z=9$ a paraboloidem $z=x^2+y^2$.

4.17. Určete objem tělesa ohraničeného paraboloidy $z=4-x^2-y^2$ a $z=3x^2+2+3y^2$.

4.18. Pomocí polárních souřadnic určete objem pravoúhlého kruhového kuželu s výškou h a kruhovou základnou s poloměrem R.

4.19. Definujme střední hodnotu funkce f vzhledem k oblasti D jako

$$\mathrm{E}(f)=\frac{1}{\mathrm{Obsah}(D)}\int\int_D f(x,y)\,dxdy\ .$$

Určete střední hodnotu funkce $f(x,y)=x\cos(xy)$ vzhledem k oblasti $D=[0,\pi]\times[0,1]$.

4.20. Hmotnost m a těžiště $C=(x_0,y_0)$ plošného útvaru D s hustotou $\rho(x,y)$ je definována jako

$$m=\int\int_D \rho(x,y)\,dA,$$

$$x_0=\frac{1}{m}\int\int_D x\rho(x,y)\,dA, \qquad y_0=\frac{1}{m}\int\int_D y\rho(x,y)\,dA\ .$$

Určete hmotnost a těžiště pro

a) trojúhelník s vrcholy $(0,0),(1,1),(4,0)$ a hustotou $\rho(x,y)=x$,

b) plochy omezené parabolou $y=9-x^2$ a osou x, kde hustota je $\rho(x,y)=y$.

4.21. S použitím substituce určete $\int\int_R (x+2y)\sqrt[3]{x-y}\,dA$, kde R je omezená oblast určená křivkami $y=x$, $y=x-1$, $x+2y=0$, $x+2y=2$.

4.22. S použitím substituce spočítejte $\int_0^1 \int_0^{1-x} \sqrt{x+y}(y-2x)^2\,dydx$.

4.23. S použitím substituce spočítejte $\int\int_R (x+y)\cos(\pi(x-y))\,dA$, kde
$R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x+y, \quad x \le 1, \quad 1+y \le x \le 2+y\}$.

4.24. S použitím substituce spočítejte $\int\int_R \frac{y}{x} e^{xy}\,dA$, kde R je omezená oblast určená křivkami $xy = 2$, $xy = 4$, $y = 2x$, $y = \frac{x}{2}$.

4.25. Spočítejte integrál $\int\int_T e^{-y^2}\,dA$, kde $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le y\}$ je neomezená oblast.

4.26. Spočítejte integrál $\int_2^\infty \int_2^y \frac{1-\ln x}{y^3}\,dA$.

5 Trojný integrál

5.1. Spočítejte integrál $\int_0^1 \int_0^\pi \int_0^\pi y \sin z\,dxdydz$.

5.2. Spočítejte integrál $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^x yz\,dydzdx$.

5.3. Načrtněte oblast integrace

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y f dxdydz, \qquad \int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{x+y} f dzdydx,$$

$$\int_0^\pi \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-z^2}} f dxdzdy, \qquad \int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^x f dydzdx.$$

5.4. Načrtněte oblast integrace a spočítejte integrál:

$$\int_0^1 \int_0^{3-3x} \int_0^{3-3x-y} dz\,dy\,dx, \qquad \int_0^\pi \int_0^{\ln(\sin y)} \int_{-\infty}^z e^x\,dx\,dz\,dy.$$

5.5. Vyjádřete integrál $\int\int\int_E f dV$ pomocí všech možných pořadí integrace, kde E je omezené oblast určená pomocí:

$$a)\ x^2 + z^2 = 4, ,\ y = 0,\ y = 6, \qquad b)\ z = 0,\ z = y,\ x^2 = 1 - y,\ 9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1.$$

5.6. Spočítejte $\int\int\int_E e^x dV$ kde $E = \{(x,y,z),\ 0 \le y \le 1, 0 \le x \le y, 0 \le z \le x+y\}$.

5.7. Spočítejte $\int\int\int_E y\,dV$ kde E je shora omezená rovinou $z = x + 2y$ a leží nad oblastí v rovině xy určené křivkami $y = x^2, y = 0, x = 1$.

5.8. Spočítejte $\int\int\int_E xy\,dV$ kde E je čtyřstěn s vrcholy $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$.

5.9. Spočítejte $\int\int\int_E x\,dV$ kde E je určená paraboloidem $x = 4y^2 + 4z^2$ a rovinou $x = 4$.

5.10. Pomocí cylindrických souřadnic spočítejte $\int\int\int_D x^2 + y^2\,dV$, kde D je těleso zdola omezené kuželem $z = \sqrt{x^2+y^2}$ a shora rovinou $z = 2$.

5.11. Pomocí sférických souřadnic spočítejte $\int\int\int_B (x^2+y^2+z^2)\,dV$, kde B je jednotková koule $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$.

5.12. Určete objem tělesa omezeného shora sférou $z = x^2 + y^2 + z^2$ a zdola kuželem $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

5.13. Určete objem tělesa omezeného eliptickým válcem $4x^2 + z^2 = 4$ a rovinami $y = 0$, $y = z + 2$.

5.14. Načrtněte oblast integrace a spočítejte integrály:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r\,dzdrd\vartheta, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \rho^2 \sin\varphi\,d\rho d\vartheta d\varphi.$$

5.15. Spočítejte $\int\int\int_E x^2 + y^2\,dV$, kde $E = \{(x,y,z),\ x^2 + y^2 \le 4, -1 \le z \le 2\}$.

5.16. Spočítejte $\iiint_E x^2\,dV$, kde E je oblast uvnitř válce $x^2+y^2=1$, shora omezená kuželem $z^2=4x^2+4y^2$ a zdola rovinou $z=0$.

5.17. Spočítejte $\iiint_E xe^{(x^2+y^2+z^2)^2}\,dV$, kde E je oblast mezi sférami se středy v počátku a poloměry 1 a 2.

5.18. Zapište integrál pomocí cylindrických souřadnic a pak ho spočítejte:

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dzdydz,$$

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}}\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}}xyz\,dzdxdy.$$

5.19. Zapište integrál pomocí cylindrických souřadnic a pak ho spočítejte:

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{9-x^2-y^2}}z\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdydz,$$

$$\int_{0}^{3}\int_{0}^{\sqrt{9-y^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{18-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)\,dzdxdy.$$

6 Křivkový integrál

6.1. Určete délku spirály s parametrizací $\overrightarrow{\varphi}(t)=<2\cos t, 2\sin t, \frac{t}{\pi}>$, pro $t\in[0,2\pi]$.

6.2. Určete délku cykloidy s parametrizací $\overrightarrow{\varphi}(t)=<t-\sin t, 1-\cos t>$, pro $t\in[0,2\pi]$.

6.3. Určete délku křivky $\rho=1+\cos t$, pro $t\in[0,2\pi]$.

6.4. Spočítejte $\int_C(x+y)\,ds$, kde C je kružnice se středem v $(1/2,0)$ a poloměrem $1/2$.

6.5. Integrujte funkci $f(x,y)=x+y^2$ podél křivky z bodu $A(0,0)$ do $B(1,1)$.

6.6. Určete $\int_C y\sin z\,ds$, kde C je šroubovice s parametrizací $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=t$, $0\le t\le 2\pi$.

6.7. Určete $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, kde $\vec{F}=<x^2,xy>$ a C je horní polovina (tj. $y\ge 0$) elipsy $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ s kladnou orientací.

6.8. Určete práci síly $\vec{F}=x\vec{i}+y\vec{j}+(xz-y)\vec{k}$, která je vykonaná na částici pohybující se podél křivky s parametrizací $\vec{r}(t)=<t^2,2t,4t^3>$, $0\le t\le 1$ z bodu $A=(0,0,0)$ do bodu $B=(1,2,4)$.

6.9. Určete práci síly $\vec{F}=<x^2,ye^x>$, která je vykonaná na částici pohybující se podél křivky $x=y^2+1$ z bodu $A=(1,0)$ do bodu $B=(2,1)$.

6.10. Ukažte, že pole $\vec{F}=<e^x\cos y+yz, xz-e^x\sin y, xy+z>$ je konzervativní a najděte jeho potenciál. Pomocí něj spočítejte integrál $\int_C\vec{F}\cdot d\vec{r}$ kde C je cesta z bodu $A(1,0,2)$ do bodu $B(0,\pi,1)$.

6.11. Zjistěte, zda jsou následující pole konzervativní a pokud ano, najděte jeho potenciál:

$$\vec{F}(x,y,z)=<e^{yz},xze^{yz},xye^{yz}>,\qquad \vec{G}(x,y,z)=<1,\sin z, y\cos z>.$$

6.12. Ukažte, že integrál nezávisí na cestě a spočítejte ho:

$$\int_C \tan y\,dx+x\sec^2 y\,dy,\qquad C \text{ z bodu } (1,0) \text{ do bodu } (2,\frac{\pi}{4}).$$

6.13. Pro pole $\vec{F}(x,y)=<x^2,y^2>$ určete $\int_C\vec{F}\,d\vec{r}$, kde C je cesta $y=2x^2$ z bodu $(1,2)$ do bodu $(2,8)$. (Integrál spočítejte jak přímým výpočtem podél dané křivky, tak s použitím potenciálu pole $\vec{F}$).

6.14. Pro pole $\vec{F}(x,y) =< \frac{y^2}{1+x^2}, 2y\arctan x >$ určete $\int_C \vec{F}\,d\vec{r}$, kde C je křivka s parametrizací $\vec{r}(t) =< t^2, 2t >$ pro $0 \le t \le 1$. (Použijte potenciál pole $\vec{F}$).

6.15. Pomocí Greenovy věty spočítejte $\oint_C x^4\,dx + xy\,dy$, kde C je kladně orientovaná hranice trojúhelníku s vrcholy $A = (0,1)$, $O = (0,0)$, $B = (1,0)$.

6.16. Pomocí Greenovy věty spočítejte $\oint_C \vec{F}\,d\vec{r}$, kde $\vec{F} =< y^2\cos x, x^2 + 2y\cos x >$ a C je cesta podél celé hranice trojúhelníka postupně procházející vrcholy $O = (0,0)$, $A = (2,6)$, $B = (2,0)$ (v tomto pořadí).

6.17. Mějme cestu C, která jde z bodu $A = (-2,0)$ podél osy x až do bodu $B = (2,0)$ a pak se vrátí zpět do bodu $A = (-2,0)$ podél grafu funkce $y = \sqrt{4 - x^2}$. Určete práci síly $\vec{F} =< x^2, x^2 + 2xy >$ která je vykonaná na částici pohybující se podél této křivky C.

6.18. Spočítejte $\int_C (2 - x - y)\,ds$, kde C je jednotková kružnice v rovině xy se středem v počátku.

6.19. Pomocí Greenovy věty určete $\oint_C (3y - e^{\sin x})\,dx + (7x + \sqrt{y^4 + 1})\,dy$, kde C je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 9$.

6.20. Pomocí Greenovy věty určete $\oint_C < (2y^2 + \sqrt{1 + x^5}), (5x - e^{y^2}) > d\vec{r}$, kde C je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 4$.

6.21. Ověřte Greenovu větu pro $\vec{F} =< 3x - y, x + 5y >$, jestliže C je kladně orientovaná kružnice $x^2 + y^2 = 1$.

6.22. Pomocí Greenovy věty spočítejte $\int_C y^2\,dx + 3xy\,dy$ kde $C = C_1 \cup C_2$ je hranice mezikruží určeného záporně orientovanou kružnicí C_1 s poloměrem 2 a středem v počátku a kladně orientovanou kružnicí C_2 s poloměrem 1 a středem také v počátku.

6.23. Mějme uzavřenou křivku C, která se skládá z části jdoucí z bodu $O = (0,0)$ do bodu $A = (2\pi, 0)$ podél křivky s parametrizací

$$x(t) = t\cos t, \quad y(t) = t\sin t, \qquad 0 \le t \le 2\pi,$$

a části vedoucí podél osy x z bodu $A = (2\pi, 0)$ zpátky do bodu $O = (0,0)$. Pomocí Greenovy věty určete obsah oblasti D ohraničené křivkou C.

6.24. Pomocí Greenovy věty určete obsah oblasti D ohraničené cestou C, která má parametrizaci $\vec{\varphi}(t) =< \sin 2t, \sin t >, \quad 0 \le t \le \pi$.

7 Plošný integrál

7.1. Určete povrch oblasti v rovině $x + 2y + z = 4$, která leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 4$.

7.2. Určete povrch oblasti v rovině $2x + 3y - z = 1$, která leží nad čtvercem $[1,4] \times [2,4]$.

7.3. Určete povrch části paraboloidu $z = x^2 + y^2$, která leží na rovinou $z = 9$.

7.4. Určete povrch plochy na plášti válce $x^2 + y^2 = 1$, která je vymezená rovinami $z = 0$ a $x + y + z = 2$.

7.5. Spočítejte $\int\int_S x^2\,dS$, kde S je jednotková sféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

7.6. Spočítejte $\int\int_S z\,dS$, kde S je částí válce $x^2 + y^2 = 1$ mezi rovinami $z = 0$ a $z = x + 1$.

7.7. Spočítejte $\int\int_S yz\,dS$, kde S je plocha s parametrizací $x = uv$, $y = u + v$, $z = u - v$, $u^2 + v^2 \le 1$.

7.8. Spočítejte $\int\int_S (x^2 z + y^2 z)\,dS$, kde S je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$.

7.9. Určete hmotnost plochy S, která je leží na plášti kuželu $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ a je vymezená pomocí $1 \le z \le 4$, jestliže její hustota je dána jako $\rho(x,y,z) = 10 - z$. (hmotnost$(S) = \int\int_S \rho\,dS$).

7.10. Určete $\int\int_S xy\,dS$, kde S je plocha na povrchu válce $x^2 + z^2 = 1$ mezi rovinami $y = 0$ a $x + y = 2$.

7.11. Určete $\int\int_S \sqrt{1+x^2+y^2}\, dS$, kde S je šroubová plocha s parametrizací $\vec{r}(u,v) =< u\cos v, u\sin v, v >$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$.

7.12. Spočítejte $\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F} =< y, x, z >$, S je část paraboloidu $z = 1 - x^2 - y^2$ pro $z \ge 0$.

7.13. Spočítejte $\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F} = e^y\vec{i} + ye^x\vec{j} + x^2y\vec{k}$ a S je část paraboloidu $z = x^2 + y^2$, která leží nad čtvercem $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ a je orientovaná směrem vzhůru.

7.14. Spočítejte $\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F} = x\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$, a S je část roviny $3x + 2y + z = 6$, která leží v prvním oktantu a je orientovaná směrem vzhůru.

7.15. Spočítejte $\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F} =< 0, y, -z >$ a S je uzavřená plocha s vnější orientací, která vznikne sjednocením části paraboloidu $y = x^2 + z^2$ pro $0 \le y \le 1$ a kruhu, který je průnikem válce $x^2 + z^2 \le 1$ a roviny $y = 1$.

7.16. Spočítejte $\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F} =< y, x, z^2 >$ a S je šroubová plocha s parametrizací $\vec{r}(u,v) =< u\cos v, u\sin v, v >$, $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le \pi$ a orientací indukovanou touto parametrizací.

7.17. Kapalina s hustotou 1 protéká s rychlostí danou polem $\vec{v} =< y, 1, z >$. Určete průtok kapaliny směrem vzhůru plochou S, která je částí paraboloidu $z = 9 - \frac{(x^2+y^2)}{4}$ pro $x^2 + y^2 \le 36$. (Určete $\int\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}$)

7.18. Teplota látky v bodě (x, y, z) s vodivostí $k = 6,5$ je určena funkcí $u(x, y, z) = 2y^2 + 2z^2$. Určete tepelný tok, který vteče dovnitř oblasti uvnitř válce $y^2 + z^2 = 6$ s rozmezím $0 \le x \le 4$. (Určete $\int\int_S -k\nabla u \cdot d\vec{S}$, kde S je povrch oblasti orientovaný vnitřně.)

8 Integrální věty

8.1. Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ pro $\vec{F} =< yz, xz, xy >$ a libovolnou uzavřenou křivku C v $\mathbb{R}^3$.

8.2. Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int\int_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F} =< xyz, x, e^{xy}\cos z >$ a S je polosféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$ orientovaná vzhůru.

8.3. Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $\vec{F} =< 2z, 4x, 5y >$ a C je průnik roviny $z = x + 4$ s válcem $x^2 + y^2 = 4$.

8.4. Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int\int_S \operatorname{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F} =< y^2z, xz, x^2y^2 >$ a C je částí paraboloidu $z = x^2 + y^2$, která leží uvnitř válce $x^2 + y^2 = 1$ a je orientovaná vzhůru.

8.5. Pomocí Stokesovy věty spočítejte $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, kde $\vec{F} =< xz, 2xy, 3xy >$ a C je hranice části roviny $3x + y + z = 3$, která je v prvním oktantu. Plocha je orientovaná v záporném smyslu při pohledu seshora.

8.6. Spočítejte práci síly $\vec{F} = (x^x + z^2)\vec{i} + (y^y + x^2)\vec{j} + (z^z + y^2)\vec{k}$ vykonané na částici, která se pohybuje podél okraje části sféry $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ ležící v prvním oktantu. Plocha je orientovaná v záporném smyslu při pohledu seshora.

8.7. Pomocí Gaussovy věty určete tok $\vec{F}$ plochou S (tj., plošný integrál $\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$), kde

a) $\vec{F} = 3y^2z^3\vec{i} + 9x^2yz^2\vec{j} - 4xy^2\vec{k}$ a S je povrch krychle s vrcholy $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ s vnější orientací;
b) $\vec{F} = x^3\vec{i} + y^3\vec{j} + z^3\vec{k}$ a S je sféra $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ s vnější orientací.

8.8. Ověřte Gaussovu větu pro vektorové pole $\vec{F}(x, y, z) =< 3x, xy, 2xz >$ a oblast E, která je krychle vymezená rovinami $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = 1$, $z = 0$ a $z = 1$.

8.9. Pomocí Gaussovy věty spočítejte $\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F} =< x^2y, -x^2z, z^2y >$ a S je povrch kvádru vymezeného rovinami $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$, $y = 2$, $z = 0$ a $z = 1$.

8.10. Pomocí Gaussovy věty spočítejte $\int\int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, kde $\vec{F} =< xy, y^2 + e^{xz}, \sin(xy) >$, S je povrch oblasti vymezené parabolickým válcem $z = 1 - x^2$ a rovinami $z = 0$, $y = 0$ a $y + z = 2$.

9 Fourierovy řady

9.1. Nalezněte Fourierovu řadu periodického rozšíření funkce $f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1), \\ -1, & t \in [1,2). \end{cases}$

9.2. Pro funkci $f(t) = t^2$, $t \in [-1,1]$, nalezněte její Fourierovu řadu. Pomocí Jordanova kritéria a dosazení $t = 1$ do nalezené řady ukažte, že $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

9.3. Pro vhodné periodické rozšíření funkce $f(t) = \begin{cases} -t+1, & t \in [0,1) \\ 0, & t \in [1,2) \end{cases}$ najděte její Fourierovu řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Určete součet každé z řad.

9.4. Pro vhodné periodické rozšíření funkce $f(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1) \\ 1, & t \in [1,2) \end{cases}$ najděte její Fourierovu řadu, sinovou Fourierovu řadu a kosinovou Fourierovu řadu. Určete součet každé z řad.

9.5. Nalezněte Fourierovu řadu pro funkci $f(t) = |\sin t|$.

9.6. Nalezněte Fourierovu řadu pro periodické rozšíření funkce $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \in [0,\pi), \\ 0, & t \in [\pi, 2\pi). \end{cases}$