

Matematická analýza 1

Přednáška pro zimní semestr 2025/26

Martin Křepela

Katedra matematiky FEL ČVUT

martin.krepela@fel.cvut.cz

Aktuální verze: 26. listopadu 2025

"My brain hurts!"

D. P. GUMBY

Přednáška MA1

Obsah, smysl a prostředky

Co je matematická analýza?

- „analýza“ je jen název
- matematika spojitého světa
- práce s nekonečnem
- limity, derivace a integrály

- popis procesů založených na spojité změně, diferenciální rovnice
- fyzika (nejstarší motivace)
- optimalizace (hledání maxima, nejlepšího řešení)
- aproximace (hledání přibližné hodnoty)
- matematické modelování

Přednáška (výklad teorie a početních postupů)

úterý 14:30–16:00, posluchárna 209

středa 16:15–17:45, posluchárna 256

účast nepovinná, ale doporučená

Cvičení (počítání a dokazování)

viz osobní rozvrh

účast povinná

Proseminář (další procvičení, rozšiřující informace)

středa 18:00–19:30, posluchárna 132 (týdny 1–8)

úterý 16:15–17:45, posluchárna 209 (týdny 9–14)

účast nepovinná, samostatný předmět (2 kredity)

Hlavní zdroj (skripta J. Tkadlece):

[T] J. Tkadlec: *Diferenciální a integrální počet funkcí jedné proměnné*. ČVUT, Praha, 2011

Pomocné zdroje:

Skripta čtyř jezdců z Apokalypsy (MFF UK, hlubší teorie):

[4H] L. Pick, S. Hencl, J. Spurný a M. Zelený: *Matematická analýza 1*
www2.karlin.mff.cuni.cz/~pick/analyza.pdf

Klasické učebnice matematické analýzy (velmi detailní, starší přístup):

[J] V. Jarník: *Diferenciální počet I, Integrální počet I*.
dml.cz/handle/10338.dmlcz/401980
dml.cz/handle/10338.dmlcz/402028

Interaktivní Math Tutor:

[Tut] P. Habala, *Math Tutor*
math.fel.cvut.cz/mt/index.htm

Učebnice kalkulu (poměrně odlišný výklad):

[S] M. Spivak: *Calculus*, 4th Ed. Publish or Perish, Inc., 2008

[SCW] J. Stewart, D. K. Clegg, S. Watson: *Single Variable Calculus*, 9th Ed. Cengage Learning 2020

[Th] J. Haas, C. Heil, M. D. Weir, P. Bogacki: *Thomas' Calculus*, 15th Ed. Pearson 2023

Skripta o řadách:

[Pr] L. Průcha, *Řady*. ČVUT, Praha, 2005

Sbírka řešených příkladů:

[ZH] P. Zemánek, P. Hasil: *Sbírka řešených příkladů z matematické analýzy I*
is.muni.cz/do/sci/UMS/el/analyza/pdf/SPzMAI.pdf

Sbírka z pekel (neřešené příklady s velmi variabilní obtížností):

[D] B. P. Děmidovič: *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*. Fragment, 2003

Různé zajímavější problémy z matematické analýzy:

[KN] W. J. Kaczor, M. T. Nowak: *Problems in Mathematical Analysis I, II, III*, AMS 2000, 2001, 2003

Klasika o tom, jak řešit matematické problémy:

[Po] G. Pólya: *How To Solve It*, 1st Ed. Princeton University Press, 1945

Doplňkový text J. Velebila o matematické logice:

[V] J. Velebil: *Velmi jemný úvod do matematické logiky*

math.fel.cvut.cz/en/people/velebil/files/y01mlo/logika.pdf

Pozoruhodný způsob kontroly matematických důkazů počítačem:

www.ma.imperial.ac.uk/~buzzard/xena/natural_number_game

- (1) **Zápočet ze cvičení**
aktivita na cvičení, domácí úkoly
- (2) **Písemná část zkoušky**
početní i teoretické úlohy
- (3) **Ústní část zkoušky**
klíčový pojem, teoretické úlohy

Pro absolvování předmětu nutno splnit bod (3). Splnění bodu (n) je nutnou podmínkou pro splnění bodu ($n + 1$), kde $n \in \{1, 2\}$.

Základní pojmy

Elementární výroková logika

Definice 1.1 (výrok)

Výrok je takové tvrzení (oznamovací věta), o kterém má smysl říci, jestli je pravdivé (platí) nebo nepravdivé (neplatí).

je výrok	není výrok
„Číslo 6 je sudé.“	„Bang!“
„Brno leží v Čechách.“	„Kéž by už bylo 16:00.“
„Číslo π^π je iracionální.“	„Teď lžu.“

Z výroků lze vytvářet složitější výroky pomocí logických operací.

Definice 1.2 (negace)

Nechť A je výrok. **Negací** výroku A je výrok:

„Neplatí A .“

Negaci A značíme symbolem

$\neg A$.

Definice 1.3 (konjunkce)

Konjunkcí výroků A a B je výrok:

„Platí A a B .“

Konjunkci značíme symboly

$A \& B$ nebo $A \wedge B$.

Definice 1.4 (disjunkce)

Disjunkcí výroků A a B je výrok:

„Platí A nebo platí B .“

Disjunkci značíme symbolem

$$A \vee B.$$

Pozor!

Disjunkce **neznamená** vylučovací vztah „bud', a nebo“ („XOR“). Výrok $A \vee B$ je pravdivý i v případě, že platí $A \& B$.

Definice 1.5 (implikace)

Implikací je výrok:

„Jestliže platí A, potom platí B.“

Tento výrok značíme symbolem

$$A \Rightarrow B.$$

Výrok A v tomto kontextu nazýváme **přepokladem (premisou)**, výrok B **závěrem**.

Alternativní formulace:

„Výrok A implikuje výrok B.“

„Z A plyne B“.

„Nechť platí A. Potom platí B.“

*„A je **postačující podmínkou** pro B.“*

*„B je **nutnou podmínkou** pro A.“*

Pozor!

Výrok $A \Rightarrow B$ platí automaticky v případě, že výrok A je nepravdivý. Například:

„Jestliže je Praha hlavním městem Tádžikistánu, potom Slunce obíhá okolo Země,“

je pravdivým výrokem.

Z tohoto výroku ovšem **nevyplývá**, že Slunce obíhá okolo Země. Ovšem ani to, že okolo ní neobíhá!

Definice 1.6 (ekvivalence)

Ekvivalenci rozumíme výrok:

„Výrok A platí právě tehdy, když platí výrok B.“

Tento výrok značíme symbolem $A \Leftrightarrow B$.

Alternativní formulace:

„Výrok A platí tehdy a jen tehdy, platí-li výrok B.“

„Výrok A je ekvivalentní výroku B“.

„A je nutnou a postačující podmínkou pro B.“

Pravdivostní tabulka pro základní typy výroků

1 = pravda, 0 = nepravda

A	B	$\neg A$	$A \& B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
1	1	0	1	①	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	①	0
0	0	1	0	0	①	1

① „OR $\neq$ XOR“

① „nepravda $\Rightarrow$ cokoli“

Věta 1.7 (vlastnosti negace, konjunkce a disjunkce)

Nechť A, B, C jsou výroky s libovolnou pravdivostí. Potom platí následující výroky:

- (i) $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$;
- (ii) $(A \& B) \Leftrightarrow (B \& A)$;
- (iii) $((A \& B) \& C) \Leftrightarrow (A \& (B \& C))$;
- (iv) $(A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$;
- (v) $((A \vee B) \vee C) \Leftrightarrow (A \vee (B \vee C))$;
- (vi) $(A \vee (B \& C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \& (A \vee C))$;
- (vii) $(A \& (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \& B) \vee (A \& C))$.

Tuto a další podobné věty lze dokázat pomocí tabulky pravdivostních hodnot (viz skripta [4H]).

Věta 1.8 (negace konjunkce, disjunkce, implikace a ekvivalence)

Nechť A, B jsou výroky s libovolnou pravdivostí. Potom platí následující výroky:

- (i) $\neg(A \& B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$;
- (ii) $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \& \neg B)$;
- (iii) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \& \neg B)$;
- (iv) $\neg(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (A \Leftrightarrow \neg B)$.

Věta 1.9 (vztah implikace a ekvivalence)

Nechť A, B jsou výroky s libovolnou pravdivostí. Potom platí:

$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A)).$$

Věta 1.10 (ekvivalentní vyjádření implikací)

Nechť A, B, C jsou výroky s libovolnou pravdivostí. Potom platí:

- (i) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A);$
- (ii) $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B);$
- (iii) $((A \vee B) \Rightarrow C) \Leftrightarrow ((A \Rightarrow C) \& (B \Rightarrow C)).$

Základní pojmy

Množiny

Definice 1.11 (množina)

Množinou rozumíme jakýkoli souhrn navzájem různých objektů (**prvků**) do jednoho celku. Skutečnost, že objekt x je prvkem množiny M , značíme

$$x \in M.$$

Naopak symbol

$$x \notin M$$

znamená, že objekt m není prvkem množiny M .

Množinu, která neobsahuje žádný prvek, nazýváme **prázdnou množinou** a značíme symbolem $\emptyset$.

Toto je „naivní definice“ množiny. Lze ji nahradit korektní formální definicí, to ale dalece přesahuje náš zájem v této přednášce.

Zkrácený zápis více prvků množiny

Nechť M je množina. Namísto

$$x_1 \in M, x_2 \in M$$

píšeme obvykle zkráceně

$$x_1, x_2 \in M.$$

Analogicky postupujeme u více prvků stejné množiny.

Jsou-li M_1, M_2 množiny, můžeme namísto

$$x_1 \in M_1, x_2 \in M_2$$

psát

$$(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2,$$

viz Definicí 1.19 kartézského součinu později. Analogie pro větší počet množin je opět možná.

Definice 1.12 (podmnožina, inkluze)

Nechť M, P jsou množiny.

- (i) Řekneme, že P je **podmnožinou** M , a značíme

$$P \subset M,$$

je-li každý prvek množiny P zároveň prvkem množiny M .

- (ii) Řekneme, že množiny P a M **jsou si rovny**, a píšeme

$$P = M,$$

platí-li zároveň $P \subset M$ a $M \subset P$. V opačném případě píšeme

$$P \neq M.$$

- (iii) Řekneme, že P je **vlastní podmnožinou** M , a značíme

$$P \subsetneq M,$$

pokud platí zároveň $P \subset M$ a $P \neq M$.

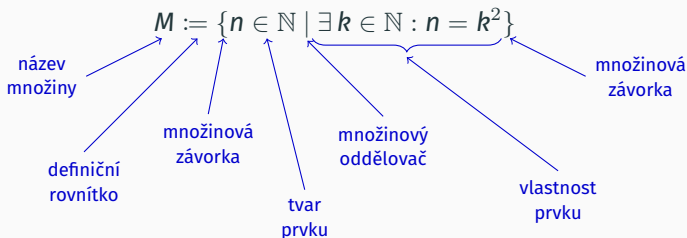
Značení:

Vztah $P \subset M$ označujeme za **neostrou inkluzi**. Někdy se v tomto kontextu místo „ $\subset$ “ používá „ $\subseteq$ “, my ale druhý symbol používat nebudeme.

Vztah $P \subsetneq M$ označujeme za **ostrou inkluzi**.

Zápis množin

Nové množiny často definujeme jako množiny všech prvků nějaké větší množiny, které mají danou vlastnost. Například předpis



definuje množinu všech druhých mocnin přirozených čísel.

Kratší zápis:

$$M := \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

Místo oddělovače $|$ se používá také středník (;), případně dvojtečka (:).

Definice 1.13 (sjednocení množin)

Nechť M, N jsou množiny.

- (i) **Sjednocením** množin M a N je množina

$$M \cup N := \{x \mid x \in M \vee x \in N\}.$$

- (ii) **Průnikem** množin M a N je množina

$$M \cap N := \{x \mid x \in M \& x \in N\}.$$

Řekneme, že M a N jsou **disjunktní**, pokud platí

$$M \cap N = \emptyset.$$

- (iii) **Rozdílem** množin M a N v tomto pořadí je množina

$$M \setminus N := \{x \mid x \in M \& x \notin N\}.$$

Pozor!

Pro zápis množinového rozdílu používáme výhradně symbol $M \setminus N$, **nikoli** „ $M - N$ “. Druhý symbol má jiný význam!

Pozorování.

Operace sjednocení a průniku jsou **komutativní**, platí totiž

$$M \cup N = N \cup M, \quad M \cap N = N \cap M.$$

Operace rozdílu není komutativní, obecně může nastat

$$M \setminus N \neq N \setminus M.$$

V jakém případě zde jediné nastává rovnost?

Konec 1. přednášky 23. 9. 2024

Zavedeme nyní „intuitivně“ základní číselné obory.

Přesnější (ale méně intuitivní) definice uvidíme zanedlouho.

Přirozenými čísly rozumíme čísla 1, 2, 3, 4 atd. Množinu všech přirozených čísel značíme $\mathbb{N}$.

Lze tedy psát

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

Konvence.

Nulu v této přednášce nepovažujeme za přirozené číslo. Je-li třeba, lze značit

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Množina $\mathbb{N}$ je **uzavřená na operaci sčítání**, což znamená:

$$m, n \in \mathbb{N} \Rightarrow m + n \in \mathbb{N}.$$

Přirozená čísla ale neobsahují neutrální prvek vůči sčítání (nulu) a své inverzní prvky vůči sčítání (záporná celá čísla).

Množina **celých čísel** vznikne tak, že ji doplníme neutrálním prvkem vůči sčítání (0) a inverzním prvkem vůči sčítání pro každé přirozené číslo. Značíme ji $\mathbb{Z}$.

Platí tedy

$$\mathbb{Z} = \{1, 2, 3, \dots\} \cup \{0, -1, -2, -3, \dots\}.$$

Množinu **racionálních čísel** značíme $\mathbb{Q}$ a definujeme jako

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}.$$

Platí $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Racionální čísla jsou uzavřená na operace sčítání, odčítání, násobení a dělení nenulovým prvkem.

Uvedme ještě tyto notoricky známé pojmy:

Definice 1.14 (sudá a lichá čísla)

Číslo $z \in \mathbb{Z}$ se nazve

- (i) **sudé**, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že platí $z = 2k$;
- (ii) **liché**, pokud existuje $k \in \mathbb{Z}$ takové, že platí $z = 2k + 1$;

Tvrzení 1.15 (parita celých čísel)

Každé celé číslo je buď sudé, nebo liché.

Důkaz tohoto tvrzení je cvičením na matematickou indukci.

Základní pojmy

Kvantifikátory

Definice 1.16 (výroková forma)

Nechť $M_1, \dots, M_n$ jsou množiny. **Výroková forma**

$$V(x_1, \dots, x_n)$$

je výraz, jenž se stane výrokem, dosadíme-li za proměnné $x_1, \dots, x_n$ po řadě konkrétní prvky z množin $M_1, \dots, M_n$. Značíme také

$$V(x_1, \dots, x_n), \quad x_1 \in M_1, \dots, x_n \in M_n,$$

abychom specifikovali, jaké proměnné připadají v úvahu.

„Číslo x je sudé, $x \in \mathbb{N}$ “, je výroková forma.

„Číslo 4 je sudé“ je výrok.

Definice 1.17 (obecný a existenční kvantifikátor)

Nechť M je množina a $V(x)$, $x \in M$ je výroková forma.

(i) Výrok „Pro každé $x \in M$ platí $V(x)$ “ symbolicky zapisujeme

$$\forall x \in M : V(x).$$

(ii) Výrok „Existuje $x \in M$ takové, že platí $V(x)$,“ symbolicky zapisujeme

$$\exists x \in M : V(x).$$

(iii) Výrok „Existuje právě jedno $x \in M$ takové, že platí $V(x)$,“ symbolicky zapisujeme

$$\exists! x \in M : V(x).$$

Symbolsy $\forall, \exists$ nazýváme **obecný**, resp. **existenční kvantifikátor**.

Pořadí stejných kvantifikátorů

Obsahuje-li výrok/výroková forma více kvantifikátorů **stejného typu** za sebou, **můžeme** pořadí jimi kvantifikovaných výrazů libovolně zaměnit. Např. výrok

$$\forall x \in M_1 \forall y \in M_2 : V(x, y)$$

má stejnou pravdivostní hodnotu jako výrok

$$\forall y \in M_2 \forall x \in M_1 : V(x, y)$$

a oba lze zkráceně zapsat jako

$$\forall x \in M_1, y \in M_2 : V(x, y).$$

Pozor!

Jsou-li kvantifikátory **různého typu, nelze pořadí zaměnit** bez změny významu výroku/výrokové formy!

Pořadí různých kvantifikátorů

Pozor!

Jsou-li kvantifikátory **různého typu, nelze pořadí zaměnit** bez změny významu výroku/výrokové formy!

Příklad (o Čingischánovi):

Nechť D je množina všech dětí a M množina všech mužů. Uvažujme výrokovou formu

$$V(m, d), \quad m \in M, \quad d \in D$$

s významem „Muž m je otcem dítěte d “.

Co říkají výroky

$$\forall d \in D \exists m \in M : V(m, d),$$

$$\exists m \in M \forall d \in D : V(m, d)?$$

Další zkrácené značení

Nechť M je množina a U, V jsou výrokové formy s proměnnou $x \in M$. Potom výrok

$$\forall x \in M : (U(x) \Rightarrow V(x))$$

zapisujeme zkráceně jako

$$\forall x \in M, U(x) : V(x).$$

Příklad.

Velká Fermatova věta je formulována jako

$$\forall x, y, z, n \in \mathbb{N}, n > 2 : x^n + y^n \neq z^n.$$

Delší zápis je:

$$\forall x, y, z, n \in \mathbb{N} : ((n > 2) \Rightarrow (x^n + y^n \neq z^n)).$$

Otázka:

Jak zapsat výrok:

Neexistuje žádné $x \in M$, pro které platí $V(x)$? (1)

Otázka:

Jak zapsat výrok:

Neexistuje žádné $x \in M$, pro které platí $V(x)$? (1)

Nepíše se nic jako „ $\nexists$ “, **není to potřeba.**

Otázka:

Jak zapsat výrok:

Neexistuje žádné $x \in M$, pro které platí $V(x)$? (1)

Nepíše se nic jako „ $\nexists$ “, **není to potřeba**.

Výrok (1) znamená toto:

$$\neg(\exists x \in M: V(x)),$$

Otázka:

Jak zapsat výrok:

Neexistuje žádné $x \in M$, pro které platí $V(x)$? (1)

Nepíše se nic jako „ $\nexists$ “, **není to potřeba**.

Výrok (1) znamená toto:

$$\neg(\exists x \in M: V(x)),$$

tudíž se zapíše **takto**:

$$\forall x \in M: \neg V(x).$$

Negace kvantifikovaných výroků

Obecně negujeme kvantifikované výroky takto:

$$\neg(\exists x \in M: V(x)) \iff \forall x \in M: \neg V(x),$$

Obecně negujeme kvantifikované výroky takto:

$$\neg(\exists x \in M: V(x)) \iff \forall x \in M: \neg V(x),$$

$$\neg(\forall x \in M: V(x)) \iff \exists x \in M: \neg V(x).$$

Obecně negujeme kvantifikované výroky takto:

$$\neg(\exists x \in M: V(x)) \iff \forall x \in M: \neg V(x),$$

$$\neg(\forall x \in M: V(x)) \iff \exists x \in M: \neg V(x).$$

Tímto způsobem znegujeme i zřetězené kvantifikované výroky (negujeme postupně zleva doprava).

Příklad.

Nechť výroková forma $V(x, y)$ znamená:

$x + y$ je sudé číslo.

Které z těchto výroků jsou pravdivé?

(i) $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}: V(x, y)$.

Příklad.

Nechť výroková forma $V(x, y)$ znamená:

$x + y$ je sudé číslo.

Které z těchto výroků jsou pravdivé?

(i) $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}: V(x, y).$

(ii) $\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}: V(x, y).$

Příklad.

Nechť výroková forma $V(x, y)$ znamená:

$x + y$ je sudé číslo.

Které z těchto výroků jsou pravdivé?

- (i) $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}: V(x, y).$
- (ii) $\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}: V(x, y).$
- (iii) $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}: V(x, y).$

Příklad.

Nechť výroková forma $V(x, y)$ znamená:

$x + y$ je sudé číslo.

Které z těchto výroků jsou pravdivé?

- (i) $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}: V(x, y).$
- (ii) $\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z}: V(x, y).$
- (iii) $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}: V(x, y).$
- (iv) $\exists x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z}: V(x, y).$

Základní pojmy

Matematická teorie

Matematická teorie se skládá z **definic, axiomů, vět a jejich důkazů.**

Definice jsou pojmenování/označení různých objektů nebo vlastností.

Definice samotné nijak „nedokazujeme“, to by nedávalo smysl.

Záleží nám ale na tom, aby definice byly tzv. korektní, tedy aby neobsahovaly nějaký vnitřní spor, např. nedefinovaly objekt, který nemůže existovat.

Axiomy jsou tvrzení, která přijímáme bez důkazu jako pravdu. Matematika pracuje se sadami axiomů, ze kterých logicky vyvozuje všechny ostatní výsledky.

Axiomy zpravidla popisují „samozřejmé skutečnosti“, např. takový axiom může říkat: „Každý prvek (objekt) je roven sám sobě.“

Věty jsou hlavním obsahem matematiky. Často se jedná o výroky ve tvaru implikace, tedy:

„Pokud platí tento předpoklad, potom platí tento závěr.“

Předpoklady jsou ve větách zásadní, bez jejich splnění nemusí závěr platit (a zpravidla neplatí).

Věty mají i svůj praktický význam, často dávají konkrétní návod, jak „něco spočítat“.

Slovem **lemma** obvykle označujeme pomocné tvrzení, které se využívá k důkazu nějakého většího výsledku (věty).

Součástí matematických vět jsou i jejich **důkazy**. Důkazem je logické vyvození závěru z předpokladů pomocí axiomů nebo dříve dokázaných tvrzení.

Základní pojmy

Základní typy důkazů

Základní typy důkazů

Matematická tvrzení mají často podobu **implikace**

$$P \Rightarrow Z,$$

kde P je nějaký předpoklad a Z nějaký závěr.

Například tvrzení typu

„pro každý prvek x množiny M platí $Z(x)$ “

je totéž, co implikace

„ x je prvkem množiny $M \Rightarrow$ platí $Z(x)$ “.

Přímý důkaz tvrzení $P \Rightarrow Z$:

Předpokládáme P , vyvozujeme logický řetězec vhodných dílčích kroků:

$$P \Rightarrow D_1 \Rightarrow D_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow D_n \Rightarrow Z.$$

Tip – „postup pozpátku“:

Známe vhodné tvrzení C takové, že $C \Rightarrow Z$? Možná je jednodušší dokázat $P \Rightarrow C$.

Jak se přímo dokazují tvrzení typu $\forall x \in M: V(x)$?

Předpokládáme, že $x \in M$, tedy máme k dispozici nějaký takový prvek. Vyvozujeme, že platí $V(x)$ – asi z nějakých nám známých vlastností všech prvků množiny M (často např. přímo z její definice).

Jak se přímo dokazují tvrzení typu $\forall x \in M: V(x)$?

Předpokládáme, že $x \in M$, tedy máme k dispozici nějaký takový prvek. Vyvozujeme, že platí $V(x)$ – asi z nějakých nám známých vlastností všech prvků množiny M (často např. přímo z její definice).

Pozor!

Úvodní předpoklad: „nechť $x \in M$ “ je často formulován jako: „volme $x \in M$ “. Tím se ale **nemyslí**, že vybereme **konkrétní** prvek (např. $x = 5$ z množiny $\mathbb{N}$). Tak bychom dokázali pouze $V(5)$, na „ $\forall x \in \mathbb{N} : V(x)$ “ to ale **nestačí**.

Jak se přímo dokazují tvrzení typu $\forall x \in M: V(x)$?

Předpokládáme, že $x \in M$, tedy máme k dispozici nějaký takový prvek. Vывozujeme, že platí $V(x)$ – asi z nějakých nám známých vlastností všech prvků množiny M (často např. přímo z její definice).

Pozor!

Úvodní předpoklad: „nechtě $x \in M$ “ je často formulován jako: „volme $x \in M$ “. Tím se ale **nemyslí**, že vybereme **konkrétní** prvek (např. $x = 5$ z množiny $\mathbb{N}$). Tak bychom dokázali pouze $V(5)$, na „ $\forall x \in \mathbb{N} : V(x)$ “ to ale **nestačí**.

Příklad.

Dokažte přímo, že pro každé celé číslo n platí:

$$n \text{ je sudé} \Rightarrow n^2 \text{ je sudé.}$$

Jak se přímo dokazují tvrzení typu $\exists x \in M: V(x)$?

Jak se přímo dokazují tvrzení typu $\exists x \in M: V(x)$?

Konstruktivní důkaz:

Najdeme konkrétní případ prvku $x \in M$, který splňuje $V(x)$.

Jak se přímo dokazují tvrzení typu $\exists x \in M: V(x)$?

Konstruktivní důkaz:

Najdeme konkrétní případ prvku $x \in M$, který splňuje $V(x)$.

Nekonstruktivní (existenční) důkaz:

Existenci takového $x \in M$ vyvodíme bez konkrétního příkladu.

Jak se přímo dokazují tvrzení typu $\exists x \in M: V(x)$?

Konstruktivní důkaz:

Najdeme konkrétní případ prvku $x \in M$, který splňuje $V(x)$.

Nekonstruktivní (existenční) důkaz:

Existenci takového $x \in M$ vyvodíme bez konkrétního příkladu.

Příklad.

Dokažte, že v této posluchárně jsou dvě osoby, které mají narozeniny ve stejném týdnu.

Nepřímý důkaz tvrzení $P \Rightarrow Z$:

Použijeme ekvivalenci (viz V 1.10(i)):

$$(P \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (\neg Z \Rightarrow \neg P).$$

Dokázat výrok vpravo může být snazší než dokázat výrok vlevo.

Nepřímý důkaz tvrzení $P \Rightarrow Z$:

Použijeme ekvivalenci (viz V 1.10(i)):

$$(P \Rightarrow Z) \Leftrightarrow (\neg Z \Rightarrow \neg P).$$

Dokázat výrok vpravo může být snazší než dokázat výrok vlevo.

Příklad.

Dokažte nepřímo, že pro každé celé číslo n platí:

$$n^2 \text{ je sudé} \Rightarrow n \text{ je sudé}.$$

Konec 2. přednášky 24. 9. 2025

Důkaz sporem tvrzení $P \Rightarrow Z$:

Využíváme ekvivalenci (viz V 1.8(i), V 1.10(ii)):

$$(P \Rightarrow Z) \Leftrightarrow \neg(P \& \neg Z).$$

Předpokládáme tedy $P \& \neg Z$ a odtud se snažíme vyvodit **nepravdivý výrok (spor)**. Pokud se to podaří, dokázali jsme $\neg(P \& \neg Z)$, a tudíž i $P \Rightarrow Z$.

Důkaz sporem tvrzení $P \Rightarrow Z$:

Využíváme ekvivalenci (viz V 1.8(i), V 1.10(ii)):

$$(P \Rightarrow Z) \Leftrightarrow \neg(P \& \neg Z).$$

Předpokládáme tedy $P \& \neg Z$ a odtud se snažíme vyvodit **nepravdivý výrok (spor)**. Pokud se to podaří, dokázali jsme $\neg(P \& \neg Z)$, a tudíž i $P \Rightarrow Z$.

Příklad.

Dokažte, že neexistuje žádné číslo $x \in \mathbb{Q}$ takové, že $x^2 = 2$.

Důkaz matematickou indukcí

Matematickou indukcí lze často dokázat tvrzení typu

$$\forall n \in \mathbb{N} : V(n),$$

kde $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$ je nějaká výroková forma. Postupujeme takto:

1. krok:

Dokážeme, že platí $V(1)$.

2. krok (indukční krok):

Předpokládáme, že $V(n)$ platí (tzv. **indukční předpoklad**), a vyvodíme odtud, že platí $V(n + 1)$.

Pokud se oba kroky podařily, dokázali jsme, že $V(n)$ platí pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Z $V(1)$ totiž podle indukčního kroku vyplývá $V(2)$, odtud $V(3)$ atd.

Důkaz matematickou indukcí

Příklad.

Dokažte toto tvrzení (pojem $\mathbb{R}$ zde na dluh):

Tvrzení 1.18 (Bernoulliho nerovnost)

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$ a všechna $n \in \mathbb{N}$ platí:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Poznámka. Předpoklad $x \geq -1$ se zde dá dokonce zeslabit až na $x \geq -2$. To lze dokázat chytřejší indukcí.

Základní pojmy

Relace

Klíčová definice 1.19 (kartézský součin)

Nechť X, Y jsou množiny. Potom **kartézským součinem** množin X a Y , v tomto pořadí, rozumíme množinu

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Pokud $X = Y$, lze psát zkráceně

$$X^2 := X \times X.$$

Kartézský součin je tedy množina všech **uspořádaných** dvojic, které lze vytvořit tak, že prvním členem dvojice je prvek množiny X a druhým prvek množiny Y .

Na pořadí **záleží**, může platit

$$X \times Y \neq Y \times X.$$

Kdy zde platí rovnost?

Na pořadí **záleží**, může platit

$$X \times Y \neq Y \times X.$$

Kdy zde platí rovnost?

Platí: Pokud $X \neq \emptyset$ & $Y \neq \emptyset$, potom

$$(X \times Y = Y \times X) \iff (X = Y).$$

Příklad.

Uvažujme množiny

$$I := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\},$$

$$D := \left\{ \frac{k}{2} \mid k \in \mathbb{Z}, 0 \leq k \leq 2 \right\}.$$

Jak vypadají následující kartézské součiny?

(i) $I \times I$

(ii) $D \times D$

(iii) $I \times D$

(iv) $D \times I$

Klíčová definice 1.20 (relace)

Nechť X, Y jsou množiny. Potom **(binární) relací** R na $X \times Y$ nazýváme libovolnou podmnožinu kartézského součinu $X \times Y$.

Pokud $X = Y$ a $R \subset X \times X$, říkáme stručně, že R je (binární) relací na X .

V této přednášce budeme pro stručnost slovo „binární“ vypouštět.

Binární relace: značení

Nechť R je relace na $X \times Y$ a dvojice (x, y) je jejím prvkem. Jak toto značíme?

Binární relace: značení

Nechť R je relace na $X \times Y$ a dvojice (x, y) je jejím prvkem. Jak toto značíme?

Množinové značení:

$$(x, y) \in R$$

Binární relace: značení

Nechť R je relace na $X \times Y$ a dvojice (x, y) je jejím prvkem. Jak toto značíme?

Množinové značení:

$$(x, y) \in R$$

Značení „se středním symbolem“:

$$xRy$$

Např. u relace uspořádání: „ $x < y$ “ místo „ $(x, y) \in <$ “.

Binární relace: značení

Nechť R je relace na $X \times Y$ a dvojice (x, y) je jejím prvkem. Jak toto značíme?

Množinové značení:

$$(x, y) \in R$$

Značení „se středním symbolem“:

$$xRy$$

Např. u relace uspořádání: „ $x < y$ “ místo „ $(x, y) \in <$ “.

Značení pro zobrazení:

$$y = R(x)$$

Používá se, je-li R zobrazení.

Definice zobrazení a uspořádání viz dále.

Příklad.

- (i) Člověk v posluchárně je v relaci R_1 se židlí v posluchárně, pokud na ní někdy seděl.
- (ii) Reálné číslo x je v relaci R_2 s reálným číslem y , je-li druhé z nich druhou mocninou prvního.
- (iii) Dva lidé v posluchárně jsou v relaci R_3 , pokud je první z nich těžší než druhý.

Příklad.

- (i) Člověk v posluchárně je v relaci R_1 se židlí v posluchárně, pokud na ní někdy seděl.
- (ii) Reálné číslo x je v relaci R_2 s reálným číslem y , je-li druhé z nich druhou mocninou prvního.
- (iii) Dva lidé v posluchárně jsou v relaci R_3 , pokud je první z nich těžší než druhý.

Relace R_2 je dokonce zobrazení (viz D 1.21) a R_3 je uspořádání (viz D 1.33).

Základní pojmy

Zobrazení

Klíčová definice 1.21 (zobrazení)

Nechť X, Y jsou množiny.

- (i) **Zobrazení** množiny X do množiny Y nazveme takovou relací $f \subset X \times Y$, která splňuje

$$\forall x \in X \exists! y \in Y : (x, y) \in f.$$

Je-li $(x, y) \in f$, značíme

$$f(x) := y.$$

Prvek x v tomto vztahu se nazývá **argument**, prvek y pak **hodnota zobrazení** v bodě x .

- (ii) Množinu X v tomto kontextu nazveme **definičním oborem** zobrazení f a značíme $\mathcal{D}(f)$.
- (iii) **Oborem hodnot** zobrazení f nazveme množinu

$$\mathcal{R}(f) := \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Nechť X, Y jsou množiny.

Značení:

Skutečnost, že $f \subset X \times Y$ je zobrazení z X do Y , zapisujeme symbolicky takto:

$$f: X \rightarrow Y.$$

Nechť X, Y jsou množiny.

Značení:

Skutečnost, že $f \subset X \times Y$ je zobrazení z X do Y , zapisujeme symbolicky takto:

$$f: X \rightarrow Y.$$

Pozor!

Tento zápis obecně **neznamená**, že $Y = \mathcal{R}(f)$. Pouze říká, že $\mathcal{R} \subset Y$.

Náš přístup (Def. 1.21):

Zobrazení je totéž, co jeho **graf**, tedy množina uspořádaných dvojic $(x, f(x))$, kde $x \in \mathcal{D}(f)$.

Jiný přístup:

Zobrazení f jako

„pravidlo, které každému $x \in \mathcal{D}(f)$ přiřazuje právě jedno $y \in Y$ “.

To je vágní pro formální definici, dává to ale dobrou intuitivní představu. Zde je pak ale formální rozdíl mezi funkcí a jejím grafem.

Oba dva přístupy nesou stejnou informaci o zobrazení f .

Značení:

Chceme-li definovat/popsat konkrétní zobrazení, používáme často následující schéma:

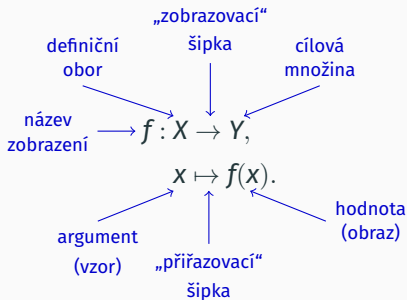
$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Namísto „ $f(x)$ “ zpravidla píšeme konkrétní požadovaný tvar obrazu, viz následující příklad.

Zobrazení: symbolické značení

Značení:

Chceme-li definovat/popsat konkrétní zobrazení, používáme často následující schéma:



Namísto „ $f(x)$ “ zpravidla píšeme konkrétní požadovaný tvar obrazu, viz následující příklad.

Zobrazení: symbolické značení

Příklad.

Zobrazení f , které každému přirozenému číslu přiřadí číslo o 1 větší, symbolicky zapíšeme takto:

$$\begin{aligned}f &: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ x &\mapsto x + 1.\end{aligned}$$

Symbol f značí celé **zobrazení**, formálně je to tedy podmnožina $\mathbb{N}^2$.

Symbol $f(x)$ značí **hodnotu zobrazení** v bodě x , je to tedy číslo.

Symbolsy „ f “ a „ $x \mapsto x + 1$ “ mají stejný význam. Formálně je správně toto zobrazení nazývat nikoli „zobrazení $x + 1$ “, ale

$$\text{„zobrazení } x \mapsto x + 1\text{“}.$$

Je ale vhodné zmínit definiční obor, zde je to $\mathbb{N}$.

Definice 1.22 (zúžení a rozšíření zobrazení)

Nechť A, B, X, Y jsou množiny a platí $A \subset X \subset B$. Nechť $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení.

- (i) **Zúžením (restrikcí)** zobrazení f na množinu A rozumíme zobrazení

$$g : A \rightarrow Y$$

$$x \mapsto f(x).$$

Toto zobrazení g značíme také symbolem $f|_A$.

- (ii) Nechť $C \supset Y$ a $h : B \rightarrow C$ je zobrazení splňující

$$\forall x \in X : h(x) = f(x).$$

Pak řekneme, že toto zobrazení h je **rozšířením (extenzí)** zobrazení f na množinu B .

Pozorování.

Zúžení je jednoznačně definováno. Rozdíl oproti původnímu f je pouze ten, že $f|_A$ je definováno na „menší“ množině $A \subset \mathcal{D}(f)$.

Na množině A jsou f a $f|_A$ definovány stejně. Mimo A zobrazení $f|_A$ definováno není.

Různých rozšíření stejného zobrazení může být nekonečně mnoho. Rozšířením je libovolné zobrazení, které se s původním f shoduje na množině $\mathcal{D}(f)$.

Jinými slovy, rozšíření f na množinu $B \supset X$ je takové zobrazení $h : B \rightarrow C \supset Y$, že f je zúžením h na množinu X .

Klíčová definice 1.23 (zobrazení prosté, na a vzájemně jednoznačné)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení. Řekneme, že f je

(i) **prosté (injektivní)**, pokud platí

$$\forall y \in \mathcal{R}(f) \exists! x \in X : y = f(x).$$

(ii) **na (surjektivní)**, pokud platí

$$\forall y \in Y \exists x \in X : y = f(x).$$

(iii) **vzájemně jednoznačné (bijektivní)**, je-li f prosté a surjektivní.

Mluvíme-li o zobrazení na, musí být zmíněna cílová množina Y , běžně užíváme formulaci „zobrazení množiny X na množinu Y “.

Ekvivalentní formulace:

Zobrazení $f : X \rightarrow Y$ je prosté, právě když

$$\forall x, z \in X : ((f(x) = f(z)) \Rightarrow (x = z)).$$

To dále ekvivalentní formulaci:

$$\forall x, z \in X : ((x \neq z) \Rightarrow (f(x) \neq f(z))).$$

Slogan:

„Prosté zobrazení zobrazuje různé argumenty na různé hodnoty.“

Ekvivalentní formulace:

Zobrazení $f: X \rightarrow Y$ je surjektivní (na množinu Y), právě když

$$\mathcal{R}(f) = Y.$$

Slogan:

„Hodnoty surjektivního zobrazení vyčerpávají celou množinu Y .“

Klíčová věta 1.24 (invertibilita bijekce)

Nechť f je bijekce množiny X na množinu Y . Potom relace

$$f^{-1} := \{(y, x) \mid x \in X, y \in Y, f(x) = y\}$$

je bijekce množiny Y na množinu X .

Klíčová definice 1.25 (inverzní zobrazení)

Nechť f je bijekce množiny X na množinu Y . Zobrazení $f^{-1} : Y \rightarrow X$ z Věty 1.24 nazýváme **inverzním zobrazením vůči f** .

Pozorování.

Za výše uvedených podmínek platí pro všechna $x \in X$ a všechna $y \in Y$:

$$(f^{-1}(y) = x) \Leftrightarrow (f(x) = y).$$

Inverzní zobrazení: je potřeba bijekce?

Pozorování.

Není-li zobrazení f bijekce, ale je alespoň **prosté**, lze stále definovat jeho inverzi, ale **pouze na množině $\mathcal{R}(f)$** . Dostáváme:

$$f^{-1} : \mathcal{R}(f) \rightarrow X;$$

$$f(x) \mapsto x$$

Konec 3. přednášky 30. 9. 2025

Definice 1.26 (obraz a vzor množiny)

Nechť X, Y jsou množiny a $f : X \rightarrow Y$ je zobrazení. Nechť $A \subset X$ a $B \subset Y$.

(i) **Obraz množiny A při zobrazení f** definujeme jako

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}.$$

(ii) **Vzor množiny B při zobrazení f** definujeme jako

$$f^{-1}(B) := \{x \in X \mid f(x) \in B\}.$$

Platí pak $f(A) \subset Y$ a $f^{-1}(B) \subset X$.

Pozor!

Vzor množiny při zobrazení f značíme symbolem $f^{-1}(B)$, což ale **neznamená**, že existuje inverzní zobrazení f^{-1} .

Definice vzoru má smysl **i pro zobrazení f , které není prosté**, symbol „ f^{-1} “ v tomto kontextu chápejte jako formální značku.

Příklad.

Mějme zobrazení

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 1 \end{aligned}$$

a množiny

$$A := \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x < 3\},$$

$$B := \{y \in \mathbb{R} \mid 3 < y < 4\},$$

$$C := \{y \in \mathbb{R} \mid y < -2\}.$$

Najděme obraz množiny A , resp. vzory množin B, C při zobrazení f .

Definice 1.27 (konečná a nekonečná množina)

Množina M se nazve **nekonečnou**, existuje-li bijekce množiny M na nějakou její vlastní podmnožinu. V opačném případě se M nazve **konečnou**.

Konečnost lze popsat i uživatelsky přístupněji:

Tvrzení 1.28 (charakterizace konečných množin)

Množina M je konečná právě tehdy, když je buď prázdná, nebo existuje číslo $n \in \mathbb{N}$ a bijekce množiny M na množinu $\{1, 2, 3, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$.

Definice 1.29 (mohutnost množiny)

Nechť M je množina.

- (i) Je-li $M = \emptyset$, definujeme $\text{card}(M) := 0$.
- (ii) Existuje-li $n \in \mathbb{N}$ a bijekce množiny M na množinu $\{1, \dots, n\} \subset \mathbb{N}$, pak definujeme $\text{card}(M) := n$.
- (iii) Je-li M nekonečná, definujeme $\text{card}(M) := \infty$.

Hodnotu $\text{card}(M)$ nazýváme **mohutností (kardinalitou)** množiny M .

Mohutnost množiny tedy odpovídá **počtu jejích prvků**. Místo „ $\text{card}(M)$ “ se někdy používá značení $|M|$ nebo $\#M$.

Definice 1.30 (spočetná množina)

Množina M se nazývá **spočetnou**, existuje-li prosté zobrazení z M do $\mathbb{N}$.
V opačném případě se M nazve **nespočetnou**.

Slogan:

„Prvky spočetné množiny lze očíslovat přirozenými čísly.“

Pozorování.

- Každá konečná množina je spočetná.
- Množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ jsou spočetné.
- Spočetné sjednocení spočetných množin je spočetné.

Klíčová definice 1.31 (složené zobrazení)

Nechť U, X, Y, Z jsou množiny. Nechť $g : X \rightarrow Y$ a $f : U \rightarrow Z$ jsou zobrazení a nechť platí $\mathcal{R}(g) \subset U$. Potom **složením** zobrazení f a g (v tomto pořadí) rozumíme zobrazení dané předpisem

$$\begin{aligned} f \circ g : X &\rightarrow Z \\ x &\mapsto f(g(x)). \end{aligned}$$

Zobrazení f se zde nazývá **vnějším** a zobrazení g **vnitřním** zobrazením.

Hodnotu složeného zobrazení v bodě $x \in X$ značíme jednoduše $f(g(x))$, případně $(f \circ g)(x)$.

Příklad.

Uvažujme zobrazení

$$f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$z \mapsto 2z - 5;$$

$$g: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$y \mapsto y^2.$$

Napišme předpisy pro zobrazení $f \circ g, g \circ f$.

Základní pojmy

Tělesa

Binární operací b na množině T rozumíme jakékoli zobrazení $b : T^2 \rightarrow T$.

Definice 1.32 (těleso)

Tělesem rozumíme množinu T , na které jsou definovány binární operace sčítání $(+)$ a násobení $(\cdot)$ a dva význačné prvky 0 a 1 , splňující následující podmínky:

$$(A1) \quad \forall x, y \in T : x + y = y + x \ \& \ xy = yx.$$

$$(A2) \quad \forall x, y, z \in T : (x + y) + z = x + (y + z) \ \& \ (xy)z = x(yz).$$

$$(A3) \quad \forall x, y, z \in T : x(y + z) = xy + xz.$$

$$(A4) \quad \forall x \in T : x + 0 = x \ \& \ x \cdot 1 = x.$$

$$(A5) \quad \forall x \in T \exists y \in T : x + y = 0.$$

$$(A6) \quad \forall x \in T \setminus \{0\} \exists y \in T : xy = 1.$$

Axiomy tělesa

- Konvence: $0 \neq 1$ (co by se stalo bez ní?)
- Prvek 0 je jediným v tělese T , který nemá inverzi vůči násobení.
- Inverze k $x \in T$ vůči sčítání se značí $-x$.
- Inverze k $x \in T$ vůči násobení se značí x^{-1} .

Axiomy tělesa

- Konvence: $0 \neq 1$ (co by se stalo bez ní?)
- Prvek 0 je jediným v tělese T , který nemá inverzi vůči násobení.
- Inverze k $x \in T$ vůči sčítání se značí $-x$.
- Inverze k $x \in T$ vůči násobení se značí x^{-1} .

Příklad.

Jsou přirozená čísla tělesem? Co celá a racionální čísla?

Axiomy tělesa

- Konvence: $0 \neq 1$ (co by se stalo bez ní?)
- Prvek 0 je jediným v tělese T , který nemá inverzi vůči násobení.
- Inverze k $x \in T$ vůči sčítání se značí $-x$.
- Inverze k $x \in T$ vůči násobení se značí x^{-1} .

Příklad.

Jsou přirozená čísla tělesem? Co celá a racionální čísla?

Příklad.

Další vlastnosti lze vyvodit z axiomů. Například dokažme:

- (i) $x + y = x + z \Rightarrow y = z$;
- (ii) inverzní prvek vůči sčítání je jednoznačný;
- (iii) $\forall x \in T : x \cdot 0 = 0$.

Definice 1.33 (uspořádané těleso)

Nechť $(T, +, \cdot, 0, 1)$ je těleso. Řekneme, že toto těleso je **uspořádané**, je-li na T dána relace $<$ splňující:

(O1) $\forall x, y \in T$ nastane právě jedna z možností: $x < y$, $y < x$, $x = y$.

(O2) $\forall x, y, z \in T : ((x < y \ \& \ y < z) \Rightarrow x < z)$.

(O3) $\forall x, y, z \in T : (x < y \Rightarrow x + z < y + z)$.

(O4) $\forall x, y, z \in T : ((x < y \ \& \ 0 < z) \Rightarrow xz < yz)$.

V tomto kontextu dále definujeme relaci $\leq$ na T tak, že $\forall x, y \in T$ řekneme, že platí $x \leq y$, právě když buď $x < y$, nebo $x = y$.

Relace $<$ a $\leq$ nazveme **ostrým**, resp. **neostrým uspořádáním tělesa T** .

Standardně budeme také používat symboly $>$, $\geq$ ve smyslu:

$$x > y \Leftrightarrow y < x, \quad x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$$

pro $x, y \in T$.

Pozorování.

Relaci uspořádání lze definovat i obecněji a nepotřebujeme pro ni ani těleso (viz DM, LGR, algebru).

Pozorování.

Relaci uspořádání lze definovat i obecněji a nepotřebujeme pro ni ani těleso (viz DM, LGR, algebru).

Příklad.

Jsou racionální čísla uspořádaným tělesem?

Pozorování.

Relaci uspořádání lze definovat i obecněji a nepotřebujeme pro ni ani těleso (viz DM, LGR, algebru).

Příklad.

Jsou racionální čísla uspořádaným tělesem?

Otázka: Jaká vlastnost jim tedy ještě chybí?

Základní pojmy

Meze a supremum

Následující teorii formulujeme obecně pro uspořádaná tělesa. Můžete si ale vždy představovat, že tímto tělesem jsou reálná čísla se standardním uspořádáním „ $<$ “ („menší než“).

Klíčová definice 1.34 (omezená množina)

Nechť $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ je uspořádané těleso a $M \subset T$.

- (i) Řekneme, že množina M je **shora omezená**, existuje-li $h \in T$ takové, že

$$\forall x \in M : x \leq h. \quad (2)$$

Každé číslo $h \in T$ splňující (2) nazveme **horní mezí** množiny M .

- (ii) Řekneme, že množina M je **zdola omezená**, existuje-li $d \in T$ takové, že

$$\forall x \in M : x \geq d. \quad (3)$$

Každé číslo $d \in T$ splňující (3) nazveme **dolní mezí** množiny M .

- (iii) Řekneme, že množina M je **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Otázka (důležitá):

Jak vypadají omezené a neomezené množiny?

Otázka (důležitá):

Jak vypadají omezené a neomezené množiny?

Pozorování.

- Neomezená množina **musí být nekonečná.**
- Omezená množina může být konečná i nekonečná.

Omezené množiny

Otázka (důležitá):

Jak vypadají omezené a neomezené množiny?

Pozorování.

- Neomezená množina **musí být nekonečná**.
- Omezená množina může být konečná i nekonečná.

Příklad.

Jsou tyto množiny (shora/zdola) omezené v tělese $\mathbb{Q}$?

- (i) $M_1 := \mathbb{N}$;
- (ii) $M_2 := \{1, 2, 3, 4\}$;
- (iii) $M_3 := \left\{ \frac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{Q} \right\}$;
- (iv) $M_4 := \left\{ x \in \mathbb{Q} \mid \frac{1}{1+x^2} < \frac{1}{5} \right\}$.

Klíčová definice 1.35 (maximum a minimum)

Nechť $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ je uspořádané těleso a $M \subset T$.

(i) Existuje-li číslo $h \in T$ takové, že platí obě podmínky

$$(Ma1) \quad \forall x \in M: x \leq h,$$

$$(Ma2) \quad h \in M,$$

pak toto číslo h nazveme **maximum** množiny M .

(ii) Existuje-li číslo $d \in T$ takové, že platí obě podmínky

$$(Mi1) \quad \forall x \in M: x \geq d,$$

$$(Mi2) \quad d \in M,$$

pak toto číslo d nazveme **minimum** množiny M .

Pozor!

- Maximum ani minimum množiny **nemusí existovat!**
- Maximum množiny M existuje, právě když je M **shora omezená** a **existuje její horní mez, která je jejím prvkem.**
- Minimum množiny M existuje, právě když je M **zdola omezená** a **existuje její dolní mez, která je jejím prvkem.**

Pozorování.

Je-li $h \in T$ horní mezí množiny $M \subset T$, je libovolné větší číslo $H > h$ také horní mezí této množiny.

Má-li M **maximum**, je toto maximum **nejmenší horní mezí** množiny M . (Proč?)

Co když ale maximum M neexistuje? Lze ho něčím nahradit?

Klíčová definice 1.36 (supremum)

Nechť $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ je uspořádané těleso a $M \subset T$ je shora omezená neprázdná množina. Řekneme, že číslo $s \in T$ je **supremum** množiny M , a píšeme

$$s = \sup M,$$

splňuje-li obě následující podmínky:

$$(S1) \quad \forall x \in M : x \leq s;$$

$$(S2) \quad \forall t \in T, t < s \exists x \in M : x > t.$$

(S1) říká, že číslo s je **horní mezí** množiny M ;

(S2) říká, že libovolné číslo **nižší než s** už **není** horní mezí M .

Supremum je tedy určeno **jednoznačně** a je **nejmenší horní mezí** množiny M .

Klíčová definice 1.37 (infimum)

Nechť $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ je uspořádané těleso a $M \subset T$ je zdola omezená neprázdná množina. Řekneme, že číslo $u \in T$ je **infimum** množiny M , a píšeme

$$u = \inf M,$$

splňuje-li obě následující podmínky:

$$(I1) \quad \forall x \in M : x \geq u;$$

$$(I2) \quad \forall v \in T, v > u \exists x \in M : x < v.$$

(I1) říká, že číslo u je **dolní mezí** množiny M ;

(I2) říká, že libovolné číslo **vyšší než** u už **není** dolní mezí M .

Infimum je tedy určeno **jednoznačně** a je **největší dolní mezí** množiny M .

Rozdíl mezi supremem a maximem množiny $M \subset T$:

Maximum množiny v ní **musí** být obsaženo.

Supremum množiny v ní **nemusí** být obsaženo.

Existuje-li **maximum** množiny, **je automaticky její supremum**.

(Dokážete to snadno z definice?)

Vše výše uvedené platí a analogicky pro infimum a minimum.

Pozorování.

Každá **konečná** neprázdná podmnožina uspořádaného tělesa T má minimum i maximum.

Konec 4. přednášky 1. 10. 2025

Otázka (důležitá):

Má každá neprázdná shora omezená podmnožina racionálních čísel racionální supremum?

Otázka (důležitá):

Má každá neprázdná shora omezená podmnožina racionálních čísel racionální supremum?

Pointa je, že supremum má být **racionální** – Def. 1.36 říká, že má být $s \in T$.

Otázka (důležitá):

Má každá neprázdná shora omezená podmnožina racionálních čísel racionální supremum?

Pointa je, že supremum má být **racionální** – Def. 1.36 říká, že má být $s \in T$.

Toho ale např. u množiny

$$M := \{q \in \mathbb{Q} \mid 0 < q^2 < 2\}$$

nelze dosáhnout.

Základní pojmy

Reálná čísla

Konstruktivní způsoby zavedení reálných čísel:

- Dedekindovy řezy
- desetinný rozvoj
- limity racionálních posloupností

Axiomatické zavedení reálných čísel:

Definujeme reálná čísla pomocí jejich **vlastností** (těleso, uspořádání, úplnost).

Definice 1.38 (úplné uspořádané těleso)

Nechť $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$ je uspořádané těleso. Řekneme, že toto těleso je **úplné**, splňuje-li podmínku:

(C) Pro každou neprázdnou shora omezenou množinu $M \subset T$ existuje její supremum $s \in T$.

Pozor!

Všimněte si podmínky $s \in T$. Je požadováno, aby hledané **supremum leželo v tělese T** . Těleso racionálních čísel podmínku (C) **nesplňuje**.

Co jsou tedy reálná čísla?

Věta 1.39 (zavedení reálných čísel)

Úplné uspořádané těleso existuje právě jedno.

Správně je zde dodat: až na izomorfismus.

Definice 1.40 (reálná čísla)

Úplné uspořádané těleso z V 1.39 nazýváme tělesem **reálných čísel** a značíme $\mathbb{R}$.

Tuto větu v přednášce nedokážeme, ale důkaz samozřejmě existuje.

Ještě jednou o přirozených číslech

Lze nejdřív axiomaticky zavést $\mathbb{R}$ a potom teprve $\mathbb{N}$ (je to ale ve skutečnosti podvod).

Myšlenka:

Reálná čísla obsahují speciální prvek 1 (neutrální vůči násobení). Uvažujme prvky

$$1, \quad 1 + 1, \quad 1 + 1 + 1 \text{ atd.}$$

Přirozená čísla jsou množinou právě všech prvků, které dostaneme tímto způsobem – sečtením konečného počtu jedniček.

Rozšířená reálná osa

Pro analýzu je zásadní koncept nekonečna, který zavedeme tato:

Definice 1.41 (rozšířená množina reálných čísel)

Rozšířenou množinou reálných čísel rozumíme množinu

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}.$$

Pojmy uspořádání a absolutní hodnoty rozšíříme na $\overline{\mathbb{R}}$ takto:

- (i) $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < \infty$;
- (ii) $|\infty| = |-\infty| = \infty$.

Později částečně rozšíříme také operace sčítání a násobení, aby je bylo (někdy) možné použít také na $\pm\infty$.

Pozor!

Prvky ∞ a $-\infty$ **nejsou** reálná čísla!

Už zase supremum a infimum

V definici 1.36 suprema podmnožiny M obecného uspořádaného tělesa jsme požadovali, aby M byla **shora omezená** a **neprázdná**. (Analogicky v D 1.37.)

U reálných čísel je praktické tyto definice rozšířit, aby supremum a infimum **měla jakákoli reálná podmnožina**. (Vzpomeňte zde vlastnost z D 1.38.) Uděláme to takto:

Klíčová definice 1.42 (supremum a infimum prázdných a neomezených podmnožin $\mathbb{R}$)

- (i) Definujeme $\sup \emptyset := -\infty$ a $\inf \emptyset := \infty$.
- (ii) Je-li $M \subset \mathbb{R}$ shora neomezená, pak definujeme $\sup M := \infty$.
- (iii) Je-li $M \subset \mathbb{R}$ zdola neomezená, pak definujeme $\inf M := -\infty$.

Jak ukázat, že reálná množina je neomezená?

Pozorování.

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Chceme-li dokázat, že množina M je shora neomezená (neboli to, že $\sup M = \infty$), máme ukázat, že platí

$$\forall h \in \mathbb{R} \exists x \in M : x > h.$$

Jak ukázat, že reálná množina je neomezená?

Pozorování.

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Chceme-li dokázat, že množina M je shora neomezená (neboli to, že $\sup M = \infty$), máme ukázat, že platí

$$\forall h \in \mathbb{R} \exists x \in M : x > h.$$

Ve skutečnosti to ale stačí testovat pouze pro kladná čísla h . Nemá-li M kladnou horní mez, nemůže mít ani zápornou.

Toto pozorování můžeme zformulovat jako následující tvrzení.

Jak ukázat, že reálná množina je neomezená?

Tvrzení 1.43 (charakterizace neomezenosti shora)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Pak jsou tyto výroky ekvivalentní:

- (i) $\forall h \in \mathbb{R} \exists x \in M : x > h$;
- (ii) $\forall h \in (0, \infty) \exists x \in M : x > h$.

Neomezenost zdola stačí testovat zápornými kandidáty na dolní mez:

Tvrzení 1.44 (charakterizace neomezenosti zdola)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Pak jsou tyto výroky ekvivalentní:

- (i) $\forall d \in \mathbb{R} \exists x \in M : x > d$;
- (ii) $\forall d \in (-\infty, 0) \exists x \in M : x < d$.

Použito je zde značení reálných intervalů (viz Def. 1.53):

$$(0, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}, \quad (-\infty, 0) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}.$$

Příklad.

Určeme supremum a infimum těchto množin v rámci úplně uspořádaného tělesa $\mathbb{R}$:

$$A := \left\{ \frac{1}{1+x^2} \mid x \in \mathbb{R} \right\};$$

$$B := \left\{ \frac{n^2+1}{n+2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Vraťme se nyní k reálným číslům. Tyto pojmy dobře znáte.

Definice 1.45 (kladná a záporná čísla)

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Řekneme, že číslo x je:

- (i) **kladné**, pokud $x > 0$;
- (ii) **záporné**, pokud $x < 0$;
- (iii) **nezáporné**, pokud $x \geq 0$;
- (iv) **nekladné**, pokud $x \leq 0$.

Definice 1.46 (absolutní hodnota reálného čísla)

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Definujeme **absolutní hodnotu** čísla x jako

$$|x| := \begin{cases} x, & \text{pokud } x \geq 0; \\ -x, & \text{pokud } x < 0. \end{cases}$$

Absolutní hodnota vyjadřuje **vzdálenost** reálného čísla od počátku při jeho zobrazení na reálné ose.

Tvrzení 1.47 (vlastnosti absolutní hodnoty)

Nechť $x, y \in \mathbb{R}$. Pak platí:

- (i) $-|x| \leq 0 \leq |x|$;
- (ii) $|xy| = |x||y|$;
- (iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Třetí vztah se nazývá **trojúhelníková nerovnost**.

Uvedeme další důležité vlastnosti reálných čísel.

Věta 1.48 (existence dolní celé části)

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom existuje právě jedno číslo $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ splňující

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Definice 1.49 (dolní celá část)

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Číslo $\lfloor x \rfloor$ z Věty 1.48 nazveme **dolní celou částí** čísla x .

- Dolní celá část je největší celé číslo, které je menší nebo rovno původnímu číslu.
- Dolní celá část čísla vznikne jeho celočíselným **zaokrouhlením** směrem **dolů**.

Podobně můžeme definovat i horní celou část.

Definice 1.50 (horní celá část)

Nechť $x \in \mathbb{R}$. Potom **horní celá část** čísla x je definována jako

$$\lceil x \rceil := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Z}; \\ \lfloor x \rfloor + 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

- Horní celá část je nejmenší celé číslo, které je větší nebo rovno původnímu číslu.
- Horní celá část čísla vznikne jeho celočíselným **zaokrouhlením** směrem **nahoru**.
- Je-li $x \in \mathbb{Z}$, pak $\lfloor x \rfloor = \lceil x \rceil$.

Věta 1.51 (existence n -té odmocniny)

Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Potom existuje právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$ takové, že $y \geq 0$ a platí $y^n = x$.

Věta 1.52 (hustota $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)

Nechť $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$. Potom existují čísla $q \in \mathbb{Q}$ a $s \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ taková, že platí

$$x < q < y \quad x < s < y.$$

Mezi každými dvěma různými reálnými čísly tedy leží nějaké racionální a nějaké iracionální číslo.

Této vlastnosti se říká, že množiny $\mathbb{Q}$ a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ jsou **husté** v množině $\mathbb{R}$.

Základní pojmy

Reálné intervaly

Definice 1.53 (otevřený interval)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Potom množinu

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

nazýváme **otevřeným intervalem** s **krajními body** a, b .

Definice 1.54 (uzavřený interval)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Potom množinu

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

nazveme **uzavřeným intervalem** s **krajními body** a, b .

Definice 1.55 (polootevřený/polouzavřený interval)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$. Potom definujeme následující množiny:

$$[a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}; \quad (4)$$

$$(a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}; \quad (5)$$

$$[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < \infty\}; \quad (6)$$

$$(-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x \leq b\}. \quad (7)$$

Tyto množiny nazýváme **polootevřenými** nebo **polouzavřenými intervaly** s **krajními body** a, b (v případech (4),(5)), a, ∞ (případ (6)), resp. $-\infty, b$ (případ (7)).

Intervaly typu $[a, \infty]$, tj. „obsahující nekonečno“, zde nedefinujeme (chceme, aby interval obsahoval pouze reálná čísla). Někdy se ale s tímto značením lze setkat.

Pozorování.

Předchozí definice dovolují, aby krajní body intervalu byly totožné.
Pro $a \in \mathbb{R}$ dostáváme:

$$(a, a) = (a, a] = [a, a) = \emptyset, \quad [a, a] = \{a\}.$$

Co zde nedovolujeme, jsou případy typu (a, b) , kde $a > b$, a typu $(a, \infty]$.
I s tímto značením se ale lze někdy setkat.

Skripta [T] používají starší značení $\langle a, b \rangle$ místo $[a, b]$.

Značení (a, b) se používá také pro uspořádané dvojice (dvouprvkové vektory). Nedorozumění ale příliš nehrozí, smysl je obvykle jasný z kontextu.

Definice 1.56 (vnitřní body intervalu)

Body intervalu, které nejsou krajními, nazýváme **vnitřními body** tohoto intervalu.

Funkce

Základní vlastnosti funkcí

Klíčová definice 2.1 (reálná funkce)

Reálnou funkcí jedné reálné proměnné rozumíme zobrazení

$$f: D \rightarrow \mathbb{R},$$

kde $D \subset \mathbb{R}$.

Pokud nebude hrozit nedorozumění, budeme v této přednášce říkat výše uvedenému pouze **funkce**.

V definici samozřejmě platí $D = \mathcal{D}(f)$.

Konec 5. přednášky 7. 10. 2025

Klíčová definice 2.2 (omezená funkce)

Nechť $B \subset A \subset \mathbb{R}$ a $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je

(i) **shora omezená na množině B** , pokud

$$\exists h \in \mathbb{R} \forall x \in B : f(x) \leq h;$$

(ii) **zdola omezená na množině B** , pokud

$$\exists d \in \mathbb{R} \forall x \in B : f(x) \geq d;$$

(iii) **omezená na množině B** , pokud je tam omezená shora i zdola.

Jinými slovy, funkce f je (shora/zdola) omezená na B , je-li $\mathcal{R}(f|_B)$ (shora/zdola) omezenou podmnožinou $\mathbb{R}$. Není-li množina B zmíněna, myslí se $B = A$, tedy celý definiční obor f .

Pozor!

Konstanty d , resp. h musí být **univerzální** pro všechna x z množiny B !

Vzpomeňme: funkce je omezená, je-li omezená jak shora, tak zdola.

Věta 2.3 (charakterizace omezenosti funkce)

Nechť $B \subset A \subset \mathbb{R}$ a $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Potom je funkce f omezená na B právě tehdy, když platí:

$$\exists c \in (0, \infty) \forall x \in B: |f(x)| \leq c.$$

Konstanta c je opět **univerzální** pro všechna $x \in B$.

Analogickou větu lze zformulovat pro omezenost množin.

Klíčová definice 2.4 (monotonní funkce)

Nechť $B \subset A \subset \mathbb{R}$. Funkce $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá

(i) **rostoucí na množině B** , pokud

$$\forall x, y \in B, x < y: f(x) < f(y).$$

(ii) **klesající na množině B** , pokud

$$\forall x, y \in B, x < y: f(x) > f(y).$$

(iii) **nerostoucí na množině B** , pokud

$$\forall x, y \in B, x < y: f(x) \geq f(y).$$

(iv) **neklesající na množině B** , pokud

$$\forall x, y \in B, x < y: f(x) \leq f(y).$$

Všechny tyto typy funkcí nazveme **monotonní na množině B** , typy (i) a (ii) pak **ryze monotonní na B** . Nemí-li množina B zmíněna, uvažujeme $B = A$, tedy celý definiční obor.

Pozor!

Funkce, která je rostoucí na dílčích intervalech, **nemusí** být rostoucí na jejich sjednocení! Totéž platí pro ostatní typy monotonie.

Monotonie funkcí

Pozor!

Funkce, která je rostoucí na dílčích intervalech, **nemusí** být rostoucí na jejich sjednocení! Totéž platí pro ostatní typy monotonie.

Varovný příklad.

Funkce $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ daná předpisem

$$f(x) := \begin{cases} x + 1, & x \in [-1, 0]; \\ x, & x \in (0, 1], \end{cases}$$

je rostoucí na $[-1, 0]$ **a** na $(0, 1]$, ale **není** rostoucí na $[-1, 1]$!

Věta 2.5 (injektivita ryze monotonních funkcí)

Je-li $X \subset \mathbb{R}$ a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je ryze monotonní funkce, potom je f prostá.

Pozorování.

Naopak to neplatí (prostá $\nRightarrow$ monotonní).

Důsledek 2.6 (invertibilita ryze monotonních funkcí)

Je-li $X \subset \mathbb{R}$ a $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ je ryze monotonní funkce, potom existuje její inverzní funkce $f^{-1}: \mathcal{R}(f) \rightarrow X$.

Definice 2.7 (sudá a lichá funkce)

Nechť f je taková funkce, že $\mathcal{D}(f)$ splňuje

$$\forall x \in \mathbb{R}: (x \in \mathcal{D}(f) \Leftrightarrow -x \in \mathcal{D}(f)). \quad (8)$$

Funkce f se pak nazývá

(i) **sudá**, pokud

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) : f(-x) = f(x);$$

(ii) **lichá**, pokud

$$\forall x \in \mathcal{D}(f) : f(-x) = -f(x);$$

Pozorování.

- (8) říká: definiční obor f musí být „symetrický podle nuly“.
- Jakou hodnotu musí mít lichá funkce v nule, pokud $0 \in \mathcal{D}(f)$?
- Jak vypadají grafy sudých a lichých funkcí?
- Funkce nemusí být sudá ani lichá.

Definice 2.8 (periodická funkce)

Nechť $p > 0$ a necht' f je taková funkce, že platí

$$\forall x \in \mathbb{R}: (x \in \mathcal{D}(f) \Leftrightarrow x + p \in \mathcal{D}(f)). \quad (9)$$

Funkce f se pak nazývá **p -periodická (periodická s periodou p)**, pokud pro každé $x \in \mathcal{D}(f)$ platí

$$f(x + p) = f(x).$$

Pozorování.

Je-li $p > 0$ perioda funkce f , pak každé číslo np , kde $n \in \mathbb{N}$, je také její perioda. Nejmenší perioda se nazývá **základní**.

Podmínka (9) říká, že definiční obor $\mathcal{D}(f)$ musí být také „ p -periodický“.

Transformace grafu

Předpokládejme, že známe graf reálné funkce f (ve formálním smyslu Def. 1.21 tedy funkci samotnou) jakožto podmnožinu $\mathbb{R}^2$.

Rozmysleme si, jak pak vypadají grafy funkcí:

$$(i) \ x \mapsto f(x + c),$$

$$(ii) \ x \mapsto f(x) + c,$$

$$(iii) \ x \mapsto f(cx),$$

$$(iv) \ x \mapsto cf(x),$$

kde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Pozorování.

Všechny tyto funkce vznikly jako **složení** $f \circ g$ (případy (i),(iii)) nebo $g \circ f$ (případy (ii),(iv)), kde $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je nějaká afinní funkce (viz Def. 2.15).

Funkce

**Mocniny, polynomy a další základní
funkce**

Definice 2.9 (celočíselná mocnina)

Nechť $x \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak definujeme

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ činitelů}},$$

Je-li navíc $x \neq 0$, pak definujeme

$$x^{-n} := \frac{1}{x^n}, \quad x^0 := 1.$$

Je-li $n \in \mathbb{Z}$ a označíme-li

$$D := \begin{cases} \mathbb{R}, & n > 0; \\ \mathbb{R} \setminus \{0\}, & n \leq 0, \end{cases}$$

pak funkci

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto x^n$$

nazveme **funkcí n -té mocniny**.

Příklad.

Pro která $n \in \mathbb{Z}$ je funkce

$$x \mapsto x^n$$

sudá a pro která lichá?

Všimněme si, že definiční obory těchto funkcí jsou symetrické podle nuly.

Věta 2.10 (bijektivita nenulové celočíselné mocniny)

Nechť $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a f je funkce n -té mocniny z Definice 2.9. Pak platí:

- (i) Je-li $n > 0$ liché, je f bijekce $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$.*
- (ii) Je-li $n < 0$ liché, je f bijekce $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.*
- (iii) Je-li $n > 0$ sudé, je restrikce $f|_{[0, \infty)}$ bijekce $[0, \infty)$ na $[0, \infty)$.*
- (iv) Je-li $n < 0$ sudé, je restrikce $f|_{(0, \infty)}$ bijekce $(0, \infty)$ na $(0, \infty)$.*

Důkaz této věty plyne z V 1.51.

Věta 2.10 nyní umožňuje zavést odmocninu:

Definice 2.11 (celočíslná odmocnina)

Nechť $n \in \mathbb{N}$.

- (i) Je-li n liché, definujeme funkci $\sqrt[n]{}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jako funkci inverzní k funkci n -té mocniny definované na $\mathbb{R}$.
- (ii) Je-li n sudé, definujeme funkci $\sqrt[n]{}: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jako funkci inverzní k zúžení funkce n -té mocniny na interval $[0, \infty)$.
- (iii) Označíme-li D definiční obor funkce $\sqrt[n]{}$ v jednom z předchozích případů, pak definujeme funkci

$$\sqrt[n]{}: D \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$$

Funkci $\sqrt[n]{}$, kde $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, nazýváme **funkcí n -té odmocniny**.

Nyní můžeme definovat i obecnější mocninu:

Definice 2.12 (racionální mocnina)

Nechť $p \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ a $r = \frac{p}{q}$. Je-li q liché, pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$x^r := \sqrt[q]{x^p}. \quad (10)$$

Je-li q sudé, pak je výraz (10) definován pouze pro každé $x \in [0, \infty)$.
V obou případech číslo x^r nazveme **r -tou mocninou čísla x** .

Pozorování.

- Pro x, p, q jako výše platí $\sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$.
- Z této definice a Definice 2.11 plyne, že $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ pro všechna x z definičního oboru n -té odmocniny.

Reálné mocniny

Naznačíme ještě způsob, jak definovat zcela **obecnou reálnou mocninu** pouze pomocí pojmů, které máme prozatím k dispozici.

Je-li $x > 0$ a $a \in \mathbb{R}$, lze definovat

$$x^a := \begin{cases} \sup \{x^r \mid r \in \mathbb{Q}, r > a\}, & 0 < x < 1; \\ \inf \{x^r \mid r \in \mathbb{Q}, r > a\}, & x \geq 1. \end{cases}$$

Všimněte si, že zde využíváme **již definovanou** racionální mocninu.

Lze potom dokázat, že pro všechna $x > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ platí vztahy

$$x^{a+b} = x^a x^b, \quad (x^a)^b = x^{ab} = (x^b)^a.$$

Později zavedeme obecnou mocninu snadněji pomocí exponenciální funkce jako

$$x^a = e^{a \ln x}.$$

Už známe funkce celočíselných mocnin. Nyní zavedeme ještě tento základní pojem:

Definice 2.13 (polynom)

Polynomem (s reálnými koeficienty) nazveme každou funkci $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že existuje číslo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a čísla $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, taková, že $a_n \neq 0$ a pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Číslo n nazveme **stupněm** polynomu p a značíme $\deg p$. Čísla a_k , kde $k \in \{0, \dots, n\}$, nazveme **koeficienty** tohoto polynomu.

Kromě toho považujeme za polynom nulového stupně také nulovou funkci danou pro všechna $x \in \mathbb{R}$ předpisem $f(x) = 0$.

Příklad.

Uvažujme tyto funkce, definované vždy na vhodné podmnožině $\mathbb{R}$.

$$x \mapsto 3x^5 - 7x^2 + x - 16 \quad \text{je polynom}$$

$$x \mapsto 2x^6 \quad \text{je polynom}$$

$$x \mapsto 10 \quad \text{je polynom}$$

$$x \mapsto x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{2}{3}} + x + 8 \quad \text{není polynom}$$

$$x \mapsto x^{-2} + 3x^{-1} + 5 \quad \text{není polynom}$$

$$x \mapsto 3e^{3x} + 5e^{2x} - 6e^x + 9 \quad \text{není polynom}$$

Definice 2.14 (konstantní funkce)

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, že pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$f(x) = c,$$

nazveme **konstantní funkcí**.

Značení:

To, že f je konstantní funkce s hodnotou $c \in \mathbb{R}$, se někdy značí symbolem

$$f \equiv c.$$

Pro polynomy nízkých stupňů často používáme toto označení:

Definice 2.15 (speciální polynomy)

- (i) Polynom stupně nejvýše 1 nazveme **afinní funkcí**.
- (ii) Polynom stupně nejvýše 2 nazveme **kvadratickou funkcí**.
- (iii) Polynom stupně nejvýše 3 nazveme **kubickou funkcí**.

Pozorování.

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Afinní funkce f s koeficientem $a_0 = 0$, tedy splňující

$$f(x) = cx$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$, je speciálním případem **lineárního zobrazení**, které znáte z LA.

Lineární reálné funkce jedné reálné proměnné ale nejsou příliš zajímavé, představují totiž vždy pouze násobení reálnou konstantou.

Definice 2.16 (racionální funkce)

Nechť p, q jsou polynomy. Označme

$$K := \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}.$$

Pak funkci

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \setminus K &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{p(x)}{q(x)} \end{aligned}$$

nazveme **racionální funkcí**.

Definice 2.17 (charakteristická funkce)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$ je libovolná množina. Pak **charakteristickou funkcí množiny M** nazýváme funkci $\chi_M: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$\chi_M(x) := \begin{cases} 1, & x \in M; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus M. \end{cases}$$

Charakteristické funkci se někdy také říká **indikátor**. Můžete se setkat se značením „ 1_M “ místo χ_M .

Obvyklý případ je charakteristická funkce intervalu (a, b) značená $\chi_{(a,b)}$.

Definice 2.18 (funkce signum)

Funkci $\operatorname{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

nazveme funkcí **signum (znaménkovou funkcí)**.

Pozorování.

Funkce signum splňuje

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \operatorname{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$$

a také toto:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \operatorname{sgn}(x) = \chi_{(0,\infty)}(x) - \chi_{(-\infty,0)}(x).$$

Běžně se setkáte také s funkcí danou předpisem

$$f(x) := \max\{g(x), h(x)\},$$

kde g, h jsou nějaké jiné funkce (může jich být i víc než dvě).

Tato funkce f tedy splňuje

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{pokud } g(x) \geq h(x); \\ h(x), & \text{pokud } g(x) < h(x). \end{cases}$$

Příklad.

Načrtněme grafy funkcí definovaných na $\mathbb{R}$ předpisy

$$f(x) := \max\{1, x^2\},$$

$$g(x) := \min\{1, x^2\},$$

$$h(x) := \min\{0, x, x^2 - 2x\}.$$

Funkce

Exponenciála a logaritmus

Klíčová věta 2.19 (axiomatické zavedení exponenciální funkce)

Existuje právě jedna funkce $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňující tyto dvě podmínky:

- (i) $\forall x, y \in \mathbb{R}: \exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y);$
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}: \exp(x) \geq 1 + x.$

Tuto funkci nazveme **exponenciální funkcí**. Používáme také značení $e^x := \exp(x).$

Hodnota $e := \exp(1)$ se nazývá **Eulerovo číslo**.

Přibližná hodnota: $e \doteq 2,71828.$

Tato věta zatím o funkci $\exp$ moc neříká, ani ji ještě neumíme dokázat.

Za předpokladu, že věta platí, můžeme ale už vyvodit, že exponenciální funkce má řadu dalších vlastností.

Konec 6. přednášky 8. 10. 2025

Klíčová věta 2.20 (vlastnosti exponenciální funkce)

Exponenciální funkce splňuje kromě podmínek z V 2.19 dále tyto:

- (i) $e^0 = 1$;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}: e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
- (iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}: (e^x)^y = (e^y)^x = e^{xy}$;
- (iv) *exponenciální funkce je rostoucí*;
- (v) *oborem hodnot exponenciální funkce je interval $(0, \infty)$.*

Vlastnosti (iii) zatím oficiálně rozumíme pouze pro x, y racionální, obecnou mocninu definujeme vzápětí.

Důsledkem vlastnosti (v) je známý odhad $e^x > 0$ platný pro všechna $x \in \mathbb{R}$.

Důsledkem vlastností (v), (vi) z Věty 2.20 a Důsledku 2.6 je toto:

Důsledek 2.21 (invertibilita exponenciály)

Existuje inverzní funkce k exponenciální funkci. Tato inverzní funkce je definována na intervalu $(0, \infty)$ a její obor hodnot je $\mathbb{R}$.

Klíčová definice 2.22 (přirozený logaritmus)

Funkci inverzní k exponenciální funkci nazveme **přirozeným logaritmem** a značíme $\ln$.

Klíčová věta 2.23 (přirozený logaritmus a jeho vlastnosti)

Přirozený logaritmus splňuje:

- (i) $\forall x, y \in (0, \infty): \ln(xy) = \ln x + \ln y;$
- (ii) $\ln 1 = 0;$
- (iii) $\forall x \in (0, \infty): \ln \frac{1}{x} = -\ln x;$
- (iv) $\forall x \in (0, \infty), y \in \mathbb{R}: \ln(x^y) = y \ln x;$
- (v) *přirozený logaritmus je rostoucí funkce;*
- (vi) *oborem hodnot přirozeného logaritmu je $\mathbb{R}$;*
- (vii) $\forall x \in (0, \infty): \ln x \leq x - 1.$

Vlastnost (iv) bude stejně jako u funkce $\exp$ legalizována vzápětí (potřebujeme definovat obecnou mocninu).

Klíčová definice 2.24 (exponenciála s obecným základem)

Nechť $a \in (0, \infty)$. Pak pro každé $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$a^x := e^{x \ln a}.$$

Funkci

$$f: \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$$

$$x \mapsto a^x$$

nazveme **exponenciální funkci o základu a** .

Dříve jsme uměli definovat r -tou mocninu kladného čísla pouze pro racionální r . Nyní už máme i obecnou verzi.

Definice 2.25 (obecná mocnina)

Nechť $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Funkci

$$f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

$$x \mapsto x^a$$

nazveme **funkcí a -té mocniny**.

Srovnejte funkce $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^a$.

Pozor!

Výraz „ 0^0 “ **není definován!** Na to pozor při počítání limit!

Věta 2.26 (vlastnosti exponenciální funkce s obecným základem)

Exponenciální funkce o základu $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ splňuje:

- (i) $\forall x, y \in \mathbb{R}: a^{x+y} = a^x a^y$;
- (ii) $a^0 = 1$;
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}: a^{-x} = \frac{1}{a^x}$;
- (iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}: (a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$;
- (v) *pro $a \in (1, \infty)$ je tato funkce rostoucí a pro $a \in (0, 1)$ klesající*;
- (vi) *oborem hodnot této funkce je interval $(0, \infty)$* ;
- (vii) $\forall x \in \mathbb{R}: a^x \geq 1 + x \ln a$.

Důsledkem vlastností (v), (vi) je opět existence inverze této funkce.

Obecný logaritmus

Klíčová definice 2.27 (logaritmus s obecným základem)

Nechť $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$. Funkci inverzní k exponenciální funkci o základu a nazveme **logaritmem o základu a** a značíme $\log_a$.

Je-li $a = 10$, funkci $\log_{10}$ nazýváme **dekadickým logaritmem** a značíme obvykle pouze $\log$.

Pozorování.

Pro $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ platí $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Technické texty (toto budeme používat my):

$\log$ značí **dekadický** logaritmus, $\ln$ značí **přirozený** logaritmus.

Matematické texty:

$\log$ značí **přirozený** logaritmus, $\ln$ neznačí **nic**.

Věta 2.28 (vlastnosti logaritmu s obecným základem)

Logaritmus o základu $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ splňuje:

- (i) $\forall x, y \in (0, \infty): \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y;$
- (ii) $\log_a 1 = 0;$
- (iii) $\forall x \in (0, \infty): \log_a \frac{1}{x} = -\log_a x;$
- (iv) $\forall x \in (0, \infty), y \in \mathbb{R}: \log_a(x^y) = y \log_a x;$
- (v) *funkce $\log_a$ je rostoucí pro $a \in (1, \infty)$ a klesající pro $a \in (0, 1)$;*
- (vi) *oborem hodnot této funkce je $\mathbb{R}$;*
- (vii) $\forall x \in (0, \infty): \log_a x \leq \frac{x-1}{\ln a}.$

Důsledek 2.29 (vztahy mezi exp a log s různými základy)

Pro všechna $a, b \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, $x \in \mathbb{R}$, $y > 0$ platí:

$$a^x = b^{x \log_b a}, \quad \log_a y = \frac{\log_b y}{\log_b a},$$

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad \log_a y = \frac{\ln y}{\ln a}.$$

Pozorování.

Změna základu exponenciály – **horizontální dilatace/kontrakce** jejího grafu.

Změna základu logaritmu – **vertikální dilatace/kontrakce** jeho grafu.

V obou případech může navíc nastat zrcadlení.

Funkce

Goniometrické a cyklometrické funkce

Goniometrické funkce

Další mimořádně významný typ funkcí je nejjednodušší zavést geometricky. Následující definice vyžaduje obrázek.

Klíčová definice 2.30 (sinus a kosinus, geometrická definice)

Pro každé $t \in \mathbb{R}$ označme (x_t, y_t) bod na jednotkové kružnici v $\mathbb{R}^2$, je-
muž odpovídá úhel průvodiče t . Potom definujeme funkci **kosinus** jako

$$\cos: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$t \mapsto x_t$$

a funkci **sinus** jako

$$\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$$

$$t \mapsto y_t.$$

Pozor!

Velikost úhlu t je zadána **v radiánech!** (Tedy π místo 180° atd.)

Klíčová věta 2.31 (základní vlastnosti sinu a kosinu)

Funkce sinus a kosinus definované na $\mathbb{R}$ mají tyto vlastnosti:

- (i) *Oborem hodnot obou těchto funkcí je $[-1, 1]$.*
- (ii) *Obě funkce jsou 2π -periodické.*
- (iii) *Funkce $\sin$ je lichá.*
- (iv) *Funkce $\cos$ je sudá.*
- (v) *Funkce $\sin$ je rostoucí na každém intervalu $\left[\frac{(4k-1)\pi}{2}, \frac{(4k+1)\pi}{2}\right]$ a klesající na každém intervalu $\left[\frac{(4k+1)\pi}{2}, \frac{(4k+3)\pi}{2}\right]$, kde $k \in \mathbb{Z}$.*
- (vi) *Funkce $\cos$ je rostoucí na každém intervalu $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ a klesající na každém intervalu $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, kde $k \in \mathbb{Z}$.*
- (vii) *Rovnost $\sin x = 0$ platí, právě když $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.*
- (viii) *Rovnost $\cos x = 0$ platí, právě když $x \in \left\{\frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.*

Klíčová věta 2.32 (součet druhých mocnin sinu a kosinu)

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Věta 2.33 (součtové vzorce pro sinus a kosinus)

Pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y.$$

Věta 2.34 (sinus a kosinus posunu a dvojnásobku argumentu)

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\sin(x + \pi) = -\sin x$$

$$\cos(x + \pi) = -\cos x$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

Klíčová definice 2.35 (tangens a kotangens)

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ definujeme

$$\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ definujeme

$$\operatorname{cotg} x := \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Reálné funkce $x \mapsto \operatorname{tg} x$, resp. $x \mapsto \operatorname{cotg} x$ definované na výše uvedených množinách nazveme funkce **tangens**, resp. **kotangens**.

Značení:

Někdy (anglicky psaná literatura) se používá značení $\tan$, $\cot$ místo výše uvedeného.

Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens souhrnně nazýváme **goniometrickými funkcemi**.

Klíčová věta 2.36 (základní vlastnosti tangenty a kotangenty)

Funkce

$$\operatorname{tg}: \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\operatorname{cotg}: \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}$$

mají tyto vlastnosti:

- (i) *Oborem hodnot obou těchto funkcí je $\mathbb{R}$.*
- (ii) *Obě funkce jsou π -periodické.*
- (iii) *Obě funkce jsou liché.*
- (iv) *Funkce tg je rostoucí na každém intervalu $\left(\frac{(2k-1)\pi}{2}, \frac{(2k+1)\pi}{2}\right)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.*
- (v) *Funkce cotg je klesající na každém intervalu $(k\pi, (k+1)\pi)$, kde $k \in \mathbb{Z}$.*
- (vi) *Rovnost $\operatorname{tg} x = 0$ platí, právě když $x \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.*
- (vii) *Rovnost $\operatorname{cotg} x = 0$ platí, právě když $x \in \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.*

Pozorování.

Goniometrické funkce jsou ryze monotonní na jistých intervalech (viz Věty 2.31, 2.36). Například funkce sinus je rostoucí na intervalu

$$A := \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Uvažujeme-li tedy zúžení funkce sinus na interval A (značeno $\sin|_A$), podle Důsledku 2.6 existuje **inverze** funkce $\sin|_A$ definovaná na množině $\mathcal{R}(\sin|_A) = [-1, 1]$.

Podobně zavedeme inverze i pro ostatní goniometrické funkce.

Klíčová definice 2.37 (cyklometrické funkce)

- (i) Jako **arkus sinus** označujeme funkci

$$\arcsin: [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

jež je inverzní k zúžení funkce sinus na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- (ii) Jako **arkus kosinus** označujeme funkci

$$\arccos: [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

jež je inverzní k zúžení funkce kosinus na interval $[0, \pi]$.

- (iii) Jako **arkus tangens** označujeme funkci

$$\operatorname{arctg}: \mathbb{R} \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

jež je inverzní k zúžení funkce tangens na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

- (iv) Jako **arkus kotangens** označujeme funkci

$$\operatorname{arccotg}: \mathbb{R} \rightarrow [0, \pi],$$

jež je inverzní k zúžení funkce kotangens na interval $[0, \pi]$.

Funkce z Definice 2.37 se nazývají **cyklometrické**. Díky jejich vztahu ke goniometrickým funkcím snadno odvodíme následující větu.

Věta 2.38 (základní vlastnosti cyklometrických funkcí)

Cyklometrické funkce mají následující vlastnosti.

- (i) $\mathcal{R}(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- (ii) $\mathcal{R}(\arccos) = [0, \pi]$.
- (iii) $\mathcal{R}(\arctg) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
- (iv) $\mathcal{R}(\operatorname{arccotg}) = (0, \pi)$.
- (v) *Funkce arkus sinus a arkus tangens jsou liché a rostoucí.*
- (vi) *Funkce arkus kosinus a arkus kotangens jsou klesající.*

Funkce

Hyperbolické a hyperbolometrické funkce

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí tzv. **Eulerova identita**

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \quad (11)$$

Tímto způsobem se zavádí exponenciální funkce **v komplexním oboru**.

Z (11) lze snadno odvodit, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}. \quad (12)$$

Tyto vztahy náležitě využijete v komplexní analýze.

Vztahy podobné těm v (12) se využijí v této definici:

Klíčová definice 2.39 (hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus)

Funkce **hyperbolický sinus** je definována předpisem

$$\begin{aligned}\sinh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

Funkce **hyperbolický kosinus** je definována předpisem

$$\begin{aligned}\cosh: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}.\end{aligned}$$

Klíčová věta 2.40 (základní vlastnosti hyperbolického sinu a hyperbolického kosinu)

Funkce sinus hyperbolický a kosinus hyperbolický definované na $\mathbb{R}$ mají tyto vlastnosti:

- (i) $\mathcal{R}(\sinh) = \mathbb{R}$.
- (ii) $\mathcal{R}(\cosh) = [1, \infty)$.
- (iii) *Funkce sinh je lichá.*
- (iv) *Funkce cosh je sudá.*
- (v) *Funkce sinh je rostoucí.*
- (vi) *Funkce cosh je rostoucí na $[0, \infty)$.*

Věta 2.41 (rozdíl druhých mocnin hyperbolického kosinu a hyperbolického sinu)

Pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Věta 2.42 (součtové vzorce pro hyperbolický sinus a hyperbolický kosinus)

Pro každá $x, y \in \mathbb{R}$ platí:

$$\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$

$$\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y.$$

Konec 7. přednášky 14. 10. 2025

Nepřekvapivě se zavádí i následující funkce:

Definice 2.43 (hyperbolická tangens a hyperbolická kotangens)

Funkce **hyperbolická tangens** je definována předpisem

$$\begin{aligned}\operatorname{tgh}: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x}.\end{aligned}$$

Funkce **hyperbolická kotangens** je definována předpisem

$$\begin{aligned}\operatorname{cotgh}: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\cosh x}{\sinh x}.\end{aligned}$$

Věta 2.44 (základní vlastnosti hyperbolické tangenty a hyperbolické kotangenty)

Funkce tangens hyperbolická, resp. kotangens hyperbolická definované na $\mathbb{R}$, resp. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mají tyto vlastnosti:

- (i) $\mathcal{R}(\operatorname{tgh}) = (-1, 1)$.
- (ii) $\mathcal{R}(\operatorname{cotgh}) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
- (iii) *Obě funkce tgh a cotgh jsou liché.*
- (iv) *Funkce tgh je rostoucí.*
- (v) *Funkce cotgh je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$.*
- (vi) *Funkce cotgh je prostá.*

Funkce $\sinh$, $\cosh$, $\tgh$, $\cotgh$ souhrnně označujeme jako **hyperbolické funkce**.

Tyto funkce splňují řadu dalších vzájemných vztahů analogických vztahům mezi goniometrickými funkcemi (viz [T]).

Vzhledem k vlastnostem z Vět 2.40, 2.44 a Důsledku 2.6 existují inverze k hyperbolickým funkcím nebo alespoň k jejich vhodnému zúžení.

Definice 2.45 (hyperbolometrické funkce)

- (i) Jako **argument sinu hyperbolického** označujeme funkci

$$\operatorname{argsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

jež je inverzní funkce k funkci sinus hyperbolický.

- (ii) Jako **argument kosinu hyperbolického** označujeme funkci

$$\operatorname{argcosh}: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty),$$

jež je inverzní k zúžení funkce kosinus hyperbolický na $[0, \infty)$.

- (iii) Jako **argument tangenty hyperbolické** označujeme funkci

$$\operatorname{argtgh}: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R},$$

jež je inverzní k funkci tangens hyperbolická.

- (iv) Jako **argument kotangenty hyperbolické** označujeme funkci

$$\operatorname{argcotgh}: (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

jež je inverzní k funkci kotangens hyperbolická.

Funkce z Definice 2.45 souhrnně nazýváme **hyperbolometrickými funkcemi**.

Věta 2.46 (základní vlastnosti hyperbolometrických funkcí)

Hyperbolometrické funkce mají následující vlastnosti.

- (i) $\mathcal{R}(\operatorname{argsinh}) = \mathbb{R}$.
- (ii) $\mathcal{R}(\operatorname{argcosh}) = [0, \infty)$.
- (iii) $\mathcal{R}(\operatorname{argtgh}) = \mathbb{R}$.
- (iv) $\mathcal{R}(\operatorname{argcotgh}) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (v) *Funkce $\operatorname{argsinh}$, $\operatorname{argcosh}$ a argtgh jsou rostoucí.*
- (vi) *Funkce $\operatorname{argcotgh}$ je klesající na intervalu $(-\infty, -1)$ a na intervalu $(1, \infty)$.*

Příklad.

Ukažme, že pro $x \in \mathbb{R}$ platí

$$\operatorname{argsinh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right).$$

Limita a spojitost funkce

Definice a vlastnosti

Klíčová definice 3.1 (okolí reálného bodu)

Nechť $a, r \in \mathbb{R}$ a $r > 0$.

(i) Množinu

$$U(a, r) := \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < r\} = (a - r, a + r)$$

nazveme **okolím bodu a o poloměru r** .

(ii) Množinu

$$U_-(a, r) := (a - r, a],$$

resp.

$$U_+(a, r) := [a, a + r),$$

nazveme **levým**, resp. **pravým okolím bodu a o poloměru r** .

Klíčová definice 3.2 (prstencové okolí reálného bodu)

Nechť $a, r \in \mathbb{R}$ a $r > 0$.

(i) Množinu

$$P(a, r) := \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x - a| < r\} = (a - r, a) \cup (a, a + r)$$

nazveme **prstencovým okolím bodu a o poloměru r** .

(ii) Množinu

$$P_-(a, r) := (a - r, a),$$

resp.

$$P_+(a, r) := (a, a + r),$$

nazveme **levým**, resp. **pravým prstencovým okolím bodu a o poloměru r** .

Pozorování.

Platí:

$$P(a, r) = U(a, r) \setminus \{a\},$$
$$P_{\pm}(a, r) = U_{\pm}(a, r) \setminus \{a\},$$

prstencové okolí tedy **neobsahuje samotný bod a .**

Poloměr r je **kladné číslo!**

Hodit se nám bude i zavedení pojmu okolí nekonečna:

Klíčová definice 3.3 (okolí nekonečna)

Nechť $r \in \mathbb{R}, r > 0$.

(i) Množinu

$$U(\infty, r) := \{x \in \mathbb{R} \mid r < x < \infty\} = (r, \infty)$$

nazveme **okolím bodu ∞ o poloměru r** . Symboly $U_-(\infty, r)$, $P(\infty, r)$ a $P_-(\infty, r)$ značí totéž, co $U(\infty, r)$.

(ii) Množinu

$$U(-\infty, r) := \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < -r\} = (-\infty, -r)$$

nazveme **okolím bodu $-\infty$ o poloměru r** . Symboly $U_+(-\infty, r)$, $P(-\infty, r)$ a $P_+(-\infty, r)$ značí totéž, co $U(-\infty, r)$.

- Pro **okolí bodu** $a \in \mathbb{R}$ platí „čím menší r , tím blíže k bodu a “.
- Pro **okolí nekonečna** platí naopak „čím větší r , tím blíže k nekonečnu“.

Ve starších verzích těchto slajdů bylo zaváděno mírně odlišné značení pro okolí nekonečna, nyní se ale budeme držet Definice 3.3.

Prstencová okolí nekonečna?

Jak je vidět v Def. 3.3, prstencové a „plné“ okolí nekonečna jsou totéž. To usnadní formulace tvrzení o limitách.

O co nám jde?

- Chceme popsat, jak se chovají funkční hodnoty $f(x)$ pro argumenty x , které jsou blízko nějakého bodu („limitní chování“).

O co nám jde?

- Chceme popsat, jak se chovají funkční hodnoty $f(x)$ pro argumenty x , které jsou blízko nějakého bodu („limitní chování“).
- „Stabilizuje“ se funkční hodnota, tedy „blíží“ se k něčemu? Jak to popsat?

O co nám jde?

- Chceme popsat, jak se chovají funkční hodnoty $f(x)$ pro argumenty x , které jsou blízko nějakého bodu („limitní chování“).
- „Stabilizuje“ se funkční hodnota, tedy „blíží“ se k něčemu? Jak to popsat?
- Funkce mohou být libovolně „divoké“. Jak vypadá funkce, jejíž hodnoty se v nějakém bodě „ničemu neblíží“?

Klíčová definice 3.4 (jednostranná limita funkce zleva)

Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a f je funkce definovaná na nějakém levém prstencovém okolí bodu a , tedy taková, že $\exists r > 0: P_-(a, r) \subset \mathcal{D}(f)$. Nechť $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zleva** rovnou L , pokud:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P_-(a, \delta): f(x) \in U(L, \varepsilon), \quad (13)$$

neboli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(P_-(a, \delta)) \subset U(L, \varepsilon).$$

V takovém případě značíme:

$$\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) = L, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a_-} L, \quad f(x) \rightarrow L \text{ pro } x \rightarrow a_-.$$

Neexistuje-li žádné $L \in \overline{\mathbb{R}}$ takové, aby platilo (13), řekneme, že funkce f **nemá limitu v bodě a zleva**, resp., že její **limita v a zleva neexistuje**, a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a_-} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Klíčová definice 3.5 (jednostranná limita funkce zprava)

Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a f je funkce definovaná na nějakém pravém prstencovém okolí bodu a , tedy taková, že $\exists r > 0: P_+(a, r) \subset \mathcal{D}(f)$. Nechť $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a **limitu zprava** rovnou L , pokud:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in P_+(a, \delta): f(x) \in U(L, \varepsilon), \quad (14)$$

neboli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: f(P_+(a, \delta)) \subset U(L, \varepsilon).$$

V takovém případě značíme:

$$\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = L, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a_+} L, \quad f(x) \rightarrow L \text{ pro } x \rightarrow a_+.$$

Neexistuje-li žádné $L \in \overline{\mathbb{R}}$ takové, aby platilo (14), řekneme, že funkce f **nemá limitu v bodě a zprava**, resp., že její **limita v a zprava neexistuje**, a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Klíčová definice 3.6 (limita funkce)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a f je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a , tedy taková, že $\exists r > 0: P(a, r) \subset \mathcal{D}(f)$. Nechť $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a **(oboustrannou) limitu L** , pokud platí:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta): f(x) \in U(L, \varepsilon), \quad (15)$$

neboli

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: f(P(a, \delta)) \subset U(L, \varepsilon).$$

V takovém případě značíme:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L, \quad f(x) \rightarrow L \text{ pro } x \rightarrow a.$$

Neexistuje-li žádné $L \in \overline{\mathbb{R}}$ takové, aby platilo (15), řekneme, že funkce f **nemá limitu v bodě a** , resp., že její **limita v a neexistuje**, a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Slovní vyjádření:

Funkce f má v bodě a limitu $L \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud ke každému okolí V hodnoty L lze najít **prstencové** okolí U bodu a , které funkce f celé zobrazí do V .

Slogan:

„Blíží-li se argument k bodu a , funkční hodnoty se blíží k hodnotě limity.“

Tyto formulace lze snadno modifikovat pro případ jednostranných limit.

Terminologie:

Řekneme, že funkce f v bodě $a \in \mathbb{R}$

- **konverguje k L** , má-li f v a **vlastní** limitu L , tedy platí-li

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R};$$

- **diverguje k $\pm\infty$** , má-li f v a **nevlastní** limitu $\pm\infty$, tedy platí-li

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty;$$

- **diverguje**, nemá-li f v a **žádnou** limitu, tedy pokud

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Důležitá pozorování:

- V grafu řídí ε **vertikální** okolí limitní hodnoty, δ řídí **horizontální** okolí limitního argumentu.
- K vertikálnímu okolí hledáme horizontální. **Naopak by to nefungovalo.**

Důležitá pozorování:

- Pokud $L \in \mathbb{R}$, pak čím menší je $\varepsilon > 0$, tím obtížnější je splnit podmínku

$$f(x) \in U(L, \varepsilon). \quad (16)$$

Pokud $L \in \{\pm\infty\}$, pak naopak čím větší je $\varepsilon > 0$, tím obtížnější je splnit (16).

- Podstatná jsou tedy **malá okolí** limitní hodnoty. Pro **konečnou limitu** L to znamená **malé hodnoty poloměru** $\varepsilon > 0$ („blízké nule“). Pro **nekonečnou limitu** L naopak **velké hodnoty** $\varepsilon > 0$.

Důležitá pozorování:

- Pro limitu funkce v bodě a **není relevantní**, zda a jak je funkce definována **v samotném bodě a** . Proto je v definici pouze **prstencové** okolí a . (Srovnajte s definicí spojitosti.)

Příklad.

Nechť $a, c \in \mathbb{R}$. Ukažme z definice limity funkce, že platí:

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} c = c; \quad (\text{limita konstantní funkce})$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} x = a;$$

$$(iii) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x = \pm\infty;$$

$$(iv) \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{1}{x} = \infty.$$

Oboustranná vs. jednostranné limity

Tvrzení 3.7 (vztah mezi jednostrannou a oboustrannou limitou)

Nechť f je funkce definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Potom má funkce f v bodě a oboustrannou limitu právě tehdy, když má v tomto bodě limitu zprava i zleva a ty se sobě rovnají.

Další věty a tvrzení budeme obvykle uvádět ve verzi pro oboustranné limity. Snadno je lze upravit do zcela analogických verzí pro limity jednostranné.

Jaké funkce limitu nemají?

Příklad.

Funkce, která nemá limitu v nekonečnu:

Z definice limity funkce můžeme ukázat, že

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin x \text{ neexistuje.}$$

Pozorování.

To, že jistá funkce nemá v jistém bodě limitu, se nejsnáze dokáže pomocí **Heineho věty**, kterou uvidíme později (V 4.8). Je to jednodušší než důkaz z definice limity funkce.

Jaké funkce limitu nemají?

Příklad.

Funkce, která má ve vlastním bodě jednostranné limity, ale ne oboustrannou:

Nechť $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0); \\ 2, & x \in [0, \infty). \end{cases}$$

Ukažme, že

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Konec 8. přednášky 15. 10. 2025

Jaké funkce limitu nemají?

Příklad.

Funkce, která ve vlastním bodě nemá ani jednu jednostrannou limitu:

Nechť $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x) := \sin \frac{1}{x}.$$

Opět lze dokázat, ať už z definice nebo pomocí Heineho (V 4.8), že

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \text{ neexistuje,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Jaké funkce limitu nemají?

Příklad.

Funkce, která ve vlastním bodě nemá ani jednu jednostrannou limitu:

Nechť $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$f(x) := \sin \frac{1}{x}.$$

Opět lze dokázat, ať už z definice nebo pomocí Heineho (V 4.8), že

$$\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) \text{ neexistuje,}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) \text{ neexistuje.}$$

Jak snadno upravit předpis, aby funkce neměla jednostranné limity v nějakém jiném zadaném bodě $a \in \mathbb{R}$?

Jaké funkce limitu nemají?

Otázka:

Je-li funkce definovaná na nějakém intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, musí mít alespoň v jednom bodě z (a, b) alespoň jednostrannou limitu?

Jaké funkce limitu nemají?

Otázka:

Je-li funkce definovaná na nějakém intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, musí mít alespoň v jednom bodě z (a, b) alespoň jednostrannou limitu?

Odpověď:

Ne.

Příklad.

Funkce, která nemá limitu v žádném bodě, a to ani jednostrannou:

Dirichletova funkce $D: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definována předpisem

$$D(x) := \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ukažme, že D nemá v žádném bodě z $\mathbb{R}$ limitu zleva, ani zprava.

Může mít funkce více limit?

Věta 3.8 (jednoznačnost limity)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a f je funkce definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu a . Potom má funkce f v bodě a nejvýše jednu limitu.

Tímto se také dodatečně legalizuje naše značení

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \text{„něco“},$$

které bychom nezaváděli, pokud by limita nebyla jednoznačně definována.

Věta 3.9 (charakterizace konečné limity)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a f je funkce definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu a . Nechť $L \in \mathbb{R}$. Pak jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L;$
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} |f(x) - L| = 0.$

Pozor!

Pro **nekonečnou** limitu toto **nelze** udělat.

Pozorování.

Věta platí samozřejmě i pro jednostranné limity.

Jaké funkce určitě mají limitu?

Otázka:

Existuje nějaký typ funkcí, u kterých si můžeme být jisti, že v daném bodě $a \in \overline{\mathbb{R}}$ mají (jednostrannou) limitu?

Jaké funkce určitě mají limitu?

Otázka:

Existuje nějaký typ funkcí, u kterých si můžeme být jisti, že v daném bodě $a \in \overline{\mathbb{R}}$ mají (jednostrannou) limitu?

Odpověď:

Jsou to například **monotonní** funkce.

Není ani třeba, aby byla funkce monotonní na celém definičním oboru, úplně stačí její monotonie **na nějakém** (jednostranném) **prstencovém okolí** bodu a (tzv. **lokální monotonie**.)

Věta 3.10 (limita monotonní funkce zleva)

Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $r > 0$ a f je funkce definovaná alespoň na $P_-(a, r)$. Je-li f na $P_-(a, r)$ monotonní, potom má f v bodě a limitu zleva. Navíc:

(i) *Je-li f neklesající na $P_-(a, r)$, potom*

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x \in P_-(a, r) \}.$$

(ii) *Je-li f nerostoucí na $P_-(a, r)$, potom*

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x \in P_-(a, r) \}.$$

- Stačí, aby funkce byla monotonní na nějakém levém prstencovém okolí bodu a , jinde může být definována jakkoli (nebo vůbec).
- Jak může vypadat funkce, která naopak není monotonní na žádném levém prstencovém okolí a ? Uvažte Dirichletovu funkci.
- Limita může být vlastní nebo nevlastní, stejně tak a může být reálné nebo $+\infty$.

Věta 3.10 má samozřejmě analogii pro limitu zprava:

Věta 3.11 (limita monotonní funkce zprava)

Nechť $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $r > 0$ a f je funkce definovaná alespoň na $P_+(a, r)$. Je-li f na $P_+(a, r)$ monotonní, potom má f v bodě a limitu zprava. Navíc:

(i) Je-li f neklesající na $P_+(a, r)$, potom

$$\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = \inf \{ f(x) \mid x \in P_+(a, r) \}.$$

(ii) Je-li f nerostoucí na $P_+(a, r)$, potom

$$\lim_{x \rightarrow a_+} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x \in P_+(a, r) \}.$$

Monotonie vs. limita

Otázka:

Proč jsme v předešlých větách tentokrát výslovně mluvili o jednostranných limitách?

Odpověď:

I přesto, že f je monotónní na oboustranném prstencovém okolí bodu a , její oboustranná limita v a **nemusí** existovat:

Příklad.

Uvažujme funkci

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} x, & x \leq 0; \\ 1 + x, & x > 0. \end{cases}$$

Jak vypadají jednostranné limity v 0? Co oboustranná limita?

Pozorování.

Z předchozích vět vidíme, že platí:

f monotonní na levém prstencovém okolí $a \Rightarrow f$ má limitu v a zleva.

Pozorování.

Z předchozích vět vidíme, že platí:

f monotonní na levém prstencovém okolí $a \Rightarrow f$ má limitu v a zleva.

Opačná implikace neplatí!

Věta 3.12 (vztah limity a lokální omezenosti)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a f je funkce definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu a . Nechť $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$. Potom platí:

- (i) Je-li $L > -\infty$, pak pro každé $d \in (-\infty, L)$ existuje $r > 0$ takové, že
$$\forall x \in P(a, r) : f(x) > d.$$
- (ii) Je-li $L < \infty$, pak pro každé $h \in (L, \infty)$ existuje $r > 0$ takové, že
$$\forall x \in P(a, r) : f(x) < h.$$

- Funkce s **vlastní nebo kladnou nevlastní** limitou v bodě a je **zdola omezená** na nějakém prstencovém okolí bodu a .
- Funkce s **vlastní nebo zápornou nevlastní** limitou v bodě a je **shora omezená** na nějakém prstencovém okolí bodu a .
- Funkce s **vlastní** limitou v bodě a je **omezená** na nějakém prstencovém okolí bodu a .

Pozor!

Omezenost, kterou dává Věta 3.12, je **vždy pouze lokální**, tedy pouze na nějakém **prstencovém okolí** bodu a .

Z existence limity funkce v bodě a **nevyplývá** omezenost funkce na žádné množině, která není podmnožinou výše uvedeného prstencového okolí.

Stejně tak z ní **nevyplývá** existence limity dané funkce v žádném bodě **jiném než a** .

Kdy můžeme „dosadit“?

Pozorování.

Z definice jsme ověřili, že pro funkci danou předpisem $f(x) := x$ a bod $a \in \mathbb{R}$ platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Tedy limitu dostaneme tak, že do předpisu funkce pouze **dosadíme** limitní argument.

To funguje pro řadu funkcí, ale **ne vždy!** (Funkce například nemusí být v a vůbec definovaná!)

Funkce, které toto umožňují, mají zásadní význam, a tudíž i vlastní pojmenování.

Kľúčová definícia 3.13 (spojitosť v bode)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f je funkce definovaná alespoň na nějakém okolí bodu a . Řekneme, že funkce f je **spojitá v bode** a , platí-li

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Pozorování:

spojitosť v $a \Rightarrow$ existence vlastní limity v a .

$\nLeftarrow$

Klíčová definice 3.14 (jednostranná spojitost v bodě)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f je funkce definovaná alespoň na nějakém levém (resp. pravém) okolí bodu a . Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě a zleva** (resp. **zprava**), platí-li

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a), \quad \left(\text{resp. } \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a) \right).$$

Věta 3.15 (vztah jednostranné a oboustranné spojitosti)

Nechť $a \in \mathbb{R}$ a nechť f je funkce definovaná alespoň na nějakém okolí bodu a . Pak je funkce f spojitá v bodě a právě tehdy, když je tam spojitá zleva i zprava.

Příklad.

- Funkce $\chi_{(0,\infty)}$ je v nule spojitá zleva, ale ne zprava.
- Funkce $\chi_{[0,\infty)}$ je v nule spojitá zprava, ale ne zleva.
- Funkce sgn není spojitá v nule ani z jedné strany.
- Všechny tři výše uvedené funkce jsou spojitě na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Dirichletova funkce není spojitá v žádném bodě z $\mathbb{R}$, nemá tam totiž ani limitu.

Definice ve skriptech [T] je poněkud odlišná:

„Funkce f je spojitá v $a \in \mathcal{D}(f)$, pokud pro každé okolí U hodnoty $f(a)$ existuje okolí V bodu a takové, že $f(V \cap \mathcal{D}(f)) \subset U$.“

Podle této definice mohou být spojitě i funkce, které nejsou definované na žádném prstencovém okolí bodu a . To naše definice (Def. 3.13) nepřipouští.

Definice 3.16 (spojitost na intervalu)

Nechť f je funkce, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Řekneme, že f je:

- (i) **spojitá na (a, b)** , pokud $(a, b) \subset \mathcal{D}(f)$ a f je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$.
- (ii) **spojitá na $[a, b)$** , pokud $[a, b) \subset \mathcal{D}(f)$, f je spojitá na (a, b) a spojitá zprava v a .
- (iii) **spojitá na $(a, b]$** , pokud $(a, b] \subset \mathcal{D}(f)$, f je spojitá na (a, b) a spojitá zleva v b .
- (iv) **spojitá na $[a, b]$** , pokud $[a, b] \subset \mathcal{D}(f)$, f je spojitá na (a, b) , spojitá zprava v a a zleva v b .

Pokud množina $M \subset \mathcal{D}(f)$ je sjednocením intervalů, řekneme, že f je spojitá na M , je-li spojitá na každém z těchto intervalů.

Řekneme-li pouze, že f je **spojitá**, znamená to, že je spojitá na celém svém definičním oboru (pokud je $\mathcal{D}(f)$ sjednocením intervalů).

Limita a spojitost funkce

Věty pro výpočet limit

Klíčová věta 3.17 (limity mocnin)

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x^a = \begin{cases} \infty, & a < 0; \\ 1, & a = 0; \\ 0, & a > 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \begin{cases} 0, & a < 0; \\ 1, & a = 0; \\ \infty, & a > 0. \end{cases}$$

Klíčová věta 3.18 (limity exponenciály a logaritmu)

Nechť $a > 0$. Potom platí:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \begin{cases} \infty, & a \in (0, 1); \\ 1, & a = 1; \\ 0, & a > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \begin{cases} 0, & a \in (0, 1); \\ 1, & a = 1; \\ \infty, & a > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} \log_a x = \begin{cases} \infty, & a \in (0, 1); \\ -\infty, & a > 1. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, & a \in (0, 1); \\ \infty, & a > 1. \end{cases}$$

Klíčová věta 3.19 (limity goniometrických a cyklometrických funkcí)

Platí:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+} \operatorname{tg} x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \operatorname{cotg} x = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x = \pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-} \operatorname{tg} x = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi-} \operatorname{cotg} x = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} x = 0,$$

Klíčová věta 3.20 (spojitost elementárních funkcí)

Všechny mocniny, exponenciální, goniometrické, hyperbolické funkce a funkce k těmto inverzní jsou spojité.

Tuto větu je možné dokázat pomocí Věty o aritmetice limit (V 3.22) a Věty o dvou políciích (V 3.28), které budou následovat.

Pro potřeby počítání limit budeme potřebovat zacházet s výrazy typu:

$$„a + \infty“, \quad „a \cdot \infty“, \quad „\infty + \infty“$$

a podobně, kde $a \in \mathbb{R}$.

Nyní tyto objekty „legalizujeme“.

Definice 3.21 (připustné výrazy s nevlastními čísly)

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Definujeme následující výrazy:

$$\infty \pm a := \infty$$

$$-\infty \pm a := -\infty$$

$$\infty + \infty := \infty$$

$$-\infty + (-\infty) := -\infty$$

$$\infty - (-\infty) := \infty$$

$$-\infty - \infty := -\infty$$

$$a \cdot \infty := \begin{cases} \infty, & a > 0; \\ -\infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$a \cdot (-\infty) := \begin{cases} -\infty, & a > 0; \\ \infty, & a < 0 \end{cases}$$

$$\infty \cdot \infty := \infty$$

$$\infty \cdot (-\infty) := -\infty$$

$$-\infty \cdot \infty := -\infty$$

$$-\infty \cdot (-\infty) := \infty$$

$$\frac{a}{\infty} := 0$$

$$\frac{a}{-\infty} := 0$$

Pozor!

Nadále **nejsou definovány** výrazy

$$\infty - \infty, \quad -\infty + \infty, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\text{„cokoli“}}{0}.$$

Tyto výrazy jsou past! Ale i s nimi se naučíme vypořádat.

Klíčová věta 3.22 (aritmetika limit)

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Nechť f, g jsou funkce definované (alespoň) na nějakém prstencovém okolí bodu a . Nechť existují limity

$$A := \lim_{x \rightarrow a} f(x) \in \overline{\mathbb{R}}, \quad B := \lim_{x \rightarrow a} g(x) \in \overline{\mathbb{R}}.$$

(i) Je-li $A \pm B$ definovaný výraz, pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x))$ a splňuje

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B.$$

(ii) Je-li AB definovaný výraz, pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x))$ a splňuje

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = AB.$$

(iii) Je-li $\frac{A}{B}$ definovaný výraz, pak existuje $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ a splňuje

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Konec 9. přednášky 21. 10. 2025

Příklad.

Určeme limity

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 5}{4 + 2x - 3x^2}.$$

Pozor!

Implikace ve Větě 3.22 **nelze obracet!**

Existence $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$ **neimplikuje** existenci $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$!

Analogicky pro součin a podíl.

Příklad.

Uvažujte $a = \infty$ a funkce dané na $\mathbb{R}$ předpisy

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = -\sin x.$$

Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = 0,$$

ale $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ani $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ neexistují.

Důsledek 3.23 (limita násobku)

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ limitu a nechť $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Slogan:

„Před limitu lze vytknout konstantu.“

Pozor!

Nesmíme před limitu vytýkat nic, co **závisí na argumentu funkce!** (Zde je argumentem x .)

Klíčová věta 3.24 (aritmetika spojitostí)

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Nechť f, g jsou funkce spojité v bodě a . Pak jsou v bodě a spojité i funkce $f \pm g$ a fg . Je-li navíc $g(a) \neq 0$, pak je v bodě a spojitá i funkce f/g .

Tato věta je přímým důsledkem věty o aritmetice limit (V 3.22) a definice spojitosti.

Věta 3.25 (limita podílu s mizejícím jmenovatelem)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a f, g jsou funkce splňující

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \in (0, \infty) \cup \{\infty\}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Nechť navíc existuje $r > 0$ takové, že

$$\forall x \in P(a, r) : g(x) > 0.$$

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty.$$

Dokážete tuto větu upravit pro zápornou limitu funkce f a/nebo funkci g zápornou na prstencovém okolí bodu a ?

Příklad.

Určeme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 3}{x^2 - 4x + 4}.$$

Příklad.

Určeme jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm} \frac{x + 1}{x - 1}.$$

Existuje oboustranná limita?

Věta 3.26 (kombinace funkcí s limitou a bez limity)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$ a f, g jsou funkce definované alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu a . Nechť funkce g má v bodě a vlastní limitu, ale limita funkce f v tomto bodě neexistuje. Potom platí následující.

- (i) Limity funkcí $f \pm g$ v bodě a neexistují.*
- (ii) Pokud platí $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, pak v bodě a neexistuje limita funkce fg ani funkce $\frac{f}{g}$.*

Příklad.

Existují limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} + \sin x \right), \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left((x+1)^2 \cos \frac{1}{x} \right)?$$

Věta 3.27 (limita a uspořádání)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r > 0$ a $f, g : P(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť

$$\forall x \in P(a, r) : f(x) \leq g(x).$$

Nechť navíc každá z funkcí f, g má v bodě a limitu. Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Pozor!

Nechť funkce f, g jsou jako ve V 3.27, ale splňují na nějakém prstencovém okolí a dokonce ostrou nerovnost:

$$f < g.$$

Potom obecně dostáváme **pouze neostrou nerovnost mezi limity**:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x).$$

Slogan:

„Limitní přechod dělá z ostrých nerovností neostré.“

Příklad.

Pro $x > 0$ definujme $f(x) = 0$, $g(x) = \frac{1}{x}$ a uvažujme limity v nekonečnu.

Klíčová věta 3.28 (sevření / dva policajti)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r > 0$ a $f, g, h : P(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť

$$\forall x \in P(a, r) : f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Nechť dále mají funkce f, h v bodě a stejnou limitu, tedy platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x).$$

Potom existuje $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ a splňuje

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \left(= \lim_{x \rightarrow a} h(x) \right).$$

Příklad.

Dokažme, že platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Příklad.

Dokažme, že platí

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1.$$

Příklad.

Určeme limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + (x + 3) \sin x).$$

Důsledek 3.29 (součin omezené a mizející funkce)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r > 0$ a $f, g : P(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť je funkce f omezená na $P(a, r)$ a platí

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = 0.$$

Příklad.

Určeme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 4} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^x - \cos(x^2 + 3)}{e^{2 \sinh x} + 6} \right) (x - 4).$$

Příklad.

Určeme limitu

$$\lim_{x \rightarrow 4} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^x - \cos(x^2 + 3)}{e^{2 \sinh x} + 6} \right) (x - 4).$$

Pro fajnšmekry: Určete limitu téhož výrazu pro $x \rightarrow \infty$. Všimněte si, že v tom případě bude třeba naprosto odlišný postup.

Konec 10. přednášky 22. 10. 2025

Kdy stačí jeden policajt?

Věta 3.30 (divergentní policajt)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r > 0$ a $f, g : P(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť

$$\forall x \in P(a, r) : f(x) \leq g(x).$$

Nechť

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty.$$

Potom platí také

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty.$$

- Na rozdíl od V 3.27 zde **nepředpokládáme**, že $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existuje. To naopak dostáváme jako součást závěru.
- Bez předpokladu, že limita f je **nevlastní a kladná**, věta **neplatí**.
- Jak lze asi větu přeformulovat pro případ horního policajta, který diverguje do $-\infty$?

Klíčová věta 3.31 (srovnávací limity důležitých funkcí)

Platí následující:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1.$$

Věta 3.32 (srovnávací limity dalších důležitých funkcí)

Platí následující:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{argtgh} x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{argsinh} x}{x} = 1.$$

Klíčová věta 3.33 (limita složené funkce)

Nechť $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, $r, s > 0$. Nechť $f: P(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$, $g: P(b, s) \rightarrow \mathbb{R}$. Nechť

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

$$\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$$

a navíc je splněna jedna z podmínek:

- (i) $b \in \mathcal{D}(g)$ a $g(b) = c$ (tedy g je spojitá v b);
- (ii) pro všechna $x \in P(a, r)$ platí $f(x) \neq b$.

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c.$$

Příklad.

Rozhodněme, jestli existují tyto limity, a případně je určíme.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \cos(x^2 - 9),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin \frac{1}{x},$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \operatorname{arctg} \exp \left(\frac{1}{x-1} \right).$$

Příklad.

Určeme následující limitu:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin(e^x - e^3)}{x^2 - 9}$$

V zápise využijeme techniku půjčování a vracení a základní srovnávací limity.

Konec 11. přednášky 29. 10. 2025

Proč jsou ve Větě 4.22 podmínky (i), (ii)?

Vnější funkce g nemusí být definovaná přímo v bodě b . Výraz $g(b)$ pak nemá smysl.

Dvě cesty ven z tohoto problému:

- (i) Vnější funkce g je definovaná v bodě b a má tam hodnotu c . (Toto znamená **spojitost** g v b . Co by se stalo, kdyby $g(b) \neq c$?)
- (ii) Hodnoty vnitřní funkce f se „vyhýbají“ hodnotě b na prstencovém okolí bodu a . Tedy na tomto okolí se neobjeví výraz $g(f(b))$.

Pozorování.

Je-li $b \in \{\pm\infty\}$ a funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu a , je podmínka (ii) splněna automaticky, protože f nabývá reálných hodnot.

Příklad nesplnění podmínek:

$$\lim_{x \rightarrow 0_{\pm}} \operatorname{sgn} \left(\left| x \sin \frac{1}{x} \right| \right) \text{ neexistují.}$$

Co máme:

- Z definice $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$:

$$\forall \varrho > 0 \exists \delta > 0: f(P(a, \delta)) \subset U(b, \varrho).$$

- Z definice $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \varrho > 0: g(P(b, \varrho)) \subset U(c, \varepsilon).$$

- Platí (i) nebo (ii).

Co chceme:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: g(f(P(a, \delta))) \subset U(c, \varepsilon).$$

Limita složené funkce - jednostranný případ

Uvažujme (oboustrannou) limitu

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin x}.$$

Ta existuje a je rovna 0. Přímou z V 4.22 to ale nedostaneme, protože vnější funkce ($y \mapsto \sqrt{y}$) nemá v bodě 0 oboustrannou limitu, ale pouze **limitu zprava**. Vadí to ale opravdu?

Pro takovéto situace máme následující „jednostrannou“ modifikaci Věty o limitě složené funkce.

Limita složené funkce: jednostranný případ

Věta 3.34 (limita složené funkce s „levou vnější funkcí“)

Nechť $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ a dále $r, s > 0$. Nechť $f : P_{\pm}(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : P_{-}(b, s) \rightarrow \mathbb{R}$ a platí

$$\forall x \in P(a, r) : f(x) \leq b.$$

Nechť platí

$$\lim_{x \rightarrow a_{\pm}} f(x) = b \quad \lim_{y \rightarrow b_{-}} g(y) = c.$$

Nechť je navíc splněna jedna z podmínek:

- (i) $b \in \mathcal{D}(g)$ a $g(b) = c$ (tedy g je spojitá zleva v b);
- (ii) pro všechna $x \in P_{\pm}(a, r)$ platí $f(x) < b(x)$.

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a_{\pm}} g(f(x)) = c.$$

Limita složené funkce: jednostranný případ

Věta 3.35 (limita složené funkce s „pravou vnější funkcí“)

Nechť $a, c \in \overline{\mathbb{R}}$, $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ a dále $r, s > 0$. Nechť $f : P_{\pm}(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$, $g : P_{+}(b, s) \rightarrow \mathbb{R}$ a platí

$$\forall x \in P(a, r) : f(x) \geq b.$$

Nechť platí

$$\lim_{x \rightarrow a_{\pm}} f(x) = b \quad \lim_{y \rightarrow b_{+}} g(y) = c.$$

Nechť je navíc splněna jedna z podmínek:

- (i) $b \in \mathcal{D}(g)$ a $g(b) = c$ (tedy g je spojitá zprava v b);
- (ii) pro všechna $x \in P_{\pm}(a, r)$ platí $f(x) > b(x)$.

Potom platí

$$\lim_{x \rightarrow a_{\pm}} g(f(x)) = c.$$

Klíčová věta 3.36 (složení spojitých funkcí)

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Je-li f funkce spojitá v bodě a a g funkce spojitá v bodě $f(a)$, pak funkce $g \circ f$ je spojitá v bodě a .

Tato věta plyne z věty o limitě složené funkce (V 4.22(i)) a definice spojitosti.

Příklad.

Pokud existuje, určíme limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + x - 3}}{x - \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Trik s rozdílem odmocnin

Příklad.

Pokud existuje, určíme limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{2x^2 + x - 3}}{x - \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Trik s rozdílem odmocnin použijte, pokud je to nutné. Někdy nemusí.

Příklad.

Pokud existuje, určíme limitu:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x - 3}}{2x - \sqrt{x^2 + 1}}.$$

Potřebovali jsme tu předchozí trik?

Limita složené funkce: typický příklad

Typické jsou takovéto limity:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}.$$

Jsou-li f, g „rozumné“ funkce (spojité nebo aspoň s limitou v potřebných bodech), můžeme se pokusit „dosadit“ limitní hodnoty.

Pozor!

Můžeme ale dostat jeden ze „**zakázaných**“ výrazů:

$$„1^{\pm\infty}“, \quad „\infty^0“, \quad „0^0“.$$

Tyto výrazy jsou past! Jak se jich zbavit?

Limita složené funkce: typický příklad

Doporučený univerzální postup:

Výraz $f(x)^{g(x)}$ nejdříve přepište do tvaru

$$e^{g(x) \ln f(x)}.$$

Tím se problém mění na zkoumání limity součinu

$$g(x) \ln f(x).$$

Dostáváme-li zde nedefinovaný výraz, můžeme často použít l'Hospitala nebo srovnávací limity z V 3.31 a V 3.32.

Limita složené funkce: typický příklad

Příklad.

Nechť $b \in \mathbb{R}$. Určeme limitu (pokud existuje):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[x]{1 + bx}.$$

Limita složené funkce: typický příklad

Příklad.

Určeme limitu (pokud existuje):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-2} \right)^{\frac{x^2+x-1}{2x^2+4}}.$$

Limita složené funkce: typický příklad

Příklad.

Určeme limitu (pokud existuje):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-2} \right)^{\frac{x^2+x-1}{2x^2+4}}.$$

Příklad.

Určeme limitu (pokud existuje):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x-2} \right)^{\frac{x^3+x-1}{2x^2+4}}.$$

Myslíte, že je to jen malá změna? Jen počkejte!

Posloupnosti

Definice a základní vlastnosti

Klíčová definice 4.1 (posloupnost)

Posloupností reálných čísel (reálnou posloupností) rozumíme jakékoli zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny $\mathbb{R}$.

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ nazýváme **n -tým členem posloupnosti** obraz prvku n a značíme jej a_n .

Celou posloupnost značíme symboly

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

- Reálnou posloupnost můžeme chápat jako funkci a definovanou takto:

$$a: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto a_n.$$

V tomto zápisu je tedy $a_n = a(n)$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

- Číslu $n \in \mathbb{N}$ u členu a_n se říká **index**. O posloupnosti $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se pak říká, že je **indexována přirozenými čísly**.
- Někdy se používá také značení s množinovými závorkami: $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. **Není** to ale totéž, jako když napíšeme

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

- Pojem posloupnosti se běžně používá v širším smyslu – je-li M libovolná množina, pak **posloupností prvků množiny M** rozumíme zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do M . Značení je pak analogické Definici 4.1.
- Obecná posloupnost také nemusí být indexována právě „od 1 do ∞ “, setkáte se např. s případy jako $(a_n)_{n=5}^{\infty}$, $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ apod.
- Někdy se hovoří o **konečných posloupnostech** $(a_n)_{n=1}^N$, kde $N \in \mathbb{N}$ je dané číslo. To je totéž, co **vektory**.

Zadávání posloupností

Posloupnost (reálná i obecná) může být zadána rozličnými způsoby, např. **předpisem závislejícím na n :**

$$a_n := n^2 - 3n + 15, \quad n \in \mathbb{N};$$

$$b_n := \begin{cases} n^3, & \text{je-li } n \in \mathbb{N} \text{ sudé;} \\ 0, & \text{je-li } n \in \mathbb{N} \text{ liché;} \end{cases}$$

přímým výčtem prvků:

$$c_1 := 3, \quad c_2 := 17, \quad c_3 := -9, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 4 : c_n := 21$$

i jinak.

Další důležitá možnost – **rekurentní zadání** posloupnosti:

Je dán jeden (nebo více) počáteční člen posloupnosti a obecný n -tý člen je vyjádřen v závislosti na předchozím (nebo více předchozích) členech.

Setkáte se s tím při řešení **diferenčních rovnic**.

Aritmetická a geometrická posloupnost

Příklad.

Nechť $c, d, q \in \mathbb{R}$.

Aritmetická posloupnost s diferencí d je dána takto:

$$a_1 := c,$$

$$a_n := d + a_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Geometrická posloupnost s kvocientem q je dána takto:

$$b_1 := c,$$

$$b_n := qb_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Dokážete napsat explicitní předpis pro jejich n -tý člen?

Příklad.

Fibonacciho posloupnost je dána následovně:

$$a_1 := 1,$$

$$a_2 := 1,$$

$$a_n := a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Fibonacciho posloupnost

Příklad.

Fibonacciho posloupnost je dána následovně:

$$a_1 := 1,$$

$$a_2 := 1,$$

$$a_n := a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 3.$$

Lze ukázat, že pak platí:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Pozorování.

Posloupnosti jsou **speciálním případem funkcí** – takových, jejichž definičním oborem je $\mathbb{N}$.

Můžeme tedy analogicky uvažovat jejich vlastnosti (srovnejte následující slajdy s jejich protějšky u funkcí).

Klíčová definice 4.2 (monotonní posloupnost)

Reálnou posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazveme

(i) **rostoucí**, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n < a_{n+1};$$

(ii) **klesající**, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n > a_{n+1};$$

(iii) **neklesající**, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq a_{n+1};$$

(iv) **nerostoucí**, pokud

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq a_{n+1}.$$

Všechny tyto typy posloupností se nazývají **monotonní**, případy (i) a (ii) pak **ryze monotonní**.

Příklad.

(i) Posloupnost

$$(2, 5, 8, 11, 14, \dots)$$

je rostoucí.

(ii) Posloupnost

$$\left(2, 2, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \dots\right)$$

je nerostoucí.

(iii) Posloupnost

$$((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$$

není monotonní.

Klíčová definice 4.3 (omezená posloupnost)

Řekneme, že reálná posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je

(i) **shora omezená**, existuje-li $h \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq h;$$

(ii) **zdola omezená**, existuje-li $d \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq d;$$

(iii) **omezená**, je-li omezená shora i zdola.

Ekvivalentní formulace:

Reálná posloupnost je (shora/zdola) omezená, je-li (shora/zdola) omezená množina jejích členů, tedy množina

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Příklad.

Rozhodněme, zda jsou následující posloupnosti omezené:

(i) $(-n^2)_{n \in \mathbb{N}}$

(ii) $((-n)^n)_{n \in \mathbb{N}}$

(iii) $(\sqrt[n]{n})_{n \in \mathbb{N}}$

V příkladu (iii) můžeme v tuto chvíli využít např. Bernoulliho nerovnost (T 1.18). Později budeme také umět ukázat, že $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, což dá omezenost podle V 4.23.

Konec 12. přednášky 31. 10. 2025

Klíčová definice 4.4 (podposloupnost)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost a $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Potom posloupnost

$$(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$$

nazveme **podposloupností** posloupnosti $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nebo posloupností **vybranou** z $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Podposloupnost vznikne tak, že **vybereme** některé členy z původní posloupnosti, ale **zachováme jejich vzájemné pořadí**.

Příklad.

Uvažujme posloupnost danou předpisem

$$a_n := 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

tedy

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 3, 5, 7, \dots).$$

Příklad.

Uvažujme posloupnost danou předpisem

$$a_n := 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

tedy

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 3, 5, 7, \dots).$$

Posloupnost

$$(4k - 3)_{k \in \mathbb{N}} = (1, 5, 9, 13, \dots)$$

je podposloupností posloupnosti $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Označíme-li totiž

$$n_k := 2k - 1 \quad \text{pro } k \in \mathbb{N},$$

pak je posloupnost vybraných indexů $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ rostoucí a dostáváme

$$(4k - 3)_{k \in \mathbb{N}} = (a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Příklad.

Uvažujme posloupnost danou předpisem

$$a_n := 2n - 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

tedy

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1, 3, 5, 7, \dots).$$

Posloupnost

$$(b_k)_{k \in \mathbb{N}} = (3, 1, 7, 5, 11, 9, \dots)$$

není podposloupností posloupnosti $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Každý její prvek sice je i prvkem $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, platí dokonce

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{b_k \mid k \in \mathbb{N}\},$$

ale **pořadí prvků není zachováno.**

Nesouvisející otázka:

Uměli byste k -tý člen b_k vyjádřit explicitním předpisem (v závislosti na k)?

Posloupnosti

Limita posloupnosti

Klíčová definice 4.5 (limita posloupnosti)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost a $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **má limitu** L , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n > n_0 : \quad a_n \in U(L, \varepsilon).$$

V takovém případě značíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \quad \text{nebo} \quad a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L.$$

Je-li zde $L \in \mathbb{R}$, řekneme, že je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **konvergentní**, resp. že má **vlastní** limitu. Pokud $L \in \{\pm\infty\}$, řekneme, že $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ má **nevlastní** limitu.

Pokud neexistuje takové $L \in \overline{\mathbb{R}}$, aby výše uvedené platilo, řekneme, že posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **nemá limitu**, resp., že **její limita neexistuje**, a píšeme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \text{ neexistuje.}$$

Slovní vyjádření:

Posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ má limitu $L \in \overline{\mathbb{R}}$, pokud pro každé okolí hodnoty L existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že všechny členy a_n posloupnosti s indexem větším než n_0 leží v tomto okolí.

Slogan:

„Členy posloupnosti s dost velkými indexy se blíží k hodnotě limity.“

Oblíbený slovní obrat:

Formulací

$$\text{„Pro dost velká } n \in \mathbb{N} \text{ platí } V(n). \text{“} \quad (17)$$

myslíme toto:

$$\text{„Existuje } n_0 \in \mathbb{N} \text{ takové, že pro všechna } n \in \mathbb{N}, n > n_0 \text{ platí } V(n). \text{“} \quad (18)$$

Ekvivalentní formulace téhož:

$$\text{„Pro všechna } n \in \mathbb{N} \text{ až na konečně mnoho platí } V(n). \text{“} \quad (19)$$

Vyjádření (17) je vágní, ale (18), (19) už jsou dostatečně přesné matematické formulace.

Důležitá pozorování:

- V definici limity jsou podstatná **malá okolí**. Pro **vlastní** limitu L tedy **malé hodnoty** $\varepsilon > 0$ (tj. blízké nule), pro **nevlastní** limitu L **velké hodnoty** $\varepsilon > 0$.
- Pro limitu je relevantní pouze chování a_n pro **velká n** , tedy pro $n \in \mathbb{N}$ větší než nějaké $n_0 \in \mathbb{N}$.

Co se děje „**před n_0** “, je **lhostejné**.

- Díky použití pojmu okolí, tj. $U(L, \varepsilon)$, máme stejně formulovanou definici pro vlastní i nevlastní limitu. Pro $L \in \mathbb{R}$ by bylo možné místo „ $a_n \in U(L, \varepsilon)$ “ psát „ $|a_n - L| < \varepsilon$ “, ale pro $L = \pm\infty$ tento zápis nelze použít.
- Limitu posloupnosti zkoumáme **pouze v nekonečnu**. Jinde to nemá smysl.

Příklad.

Ověřme z definice, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty.$$

Věta 4.6 (jednoznačnost limity)

Každá reálná posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Věta 4.7 (limita podposloupnosti)

*Nechť reálná posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ má limitu (vlastní nebo nevlastní).
Potom každá její podposloupnost má stejnou limitu.*

Díky předchozímu tvrzení lze snadno dokázat například toto:

Příklad.

Ukažme, že posloupnost $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nemá limitu.

Jaký je vztah mezi limitou funkce a limitou posloupnosti?

Uvažujme funkci $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme:

$$a_n := f(n).$$

Vzniklá posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je tedy **restrikcí** funkce f na množinu $\mathbb{N}$.

Jaký je vztah mezi limitou funkce a limitou posloupnosti?

Uvažujme funkci $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujme:

$$a_n := f(n).$$

Vzniklá posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je tedy **restrikcí** funkce f na množinu $\mathbb{N}$.

Pozorování.

Má-li funkce f limitu v nekonečnu, potom má limitu posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a obě tyto limity se rovnají.

Pozor!

Nelze to obrátit! I pokud má $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ limitu, funkce f mít limitu v nekonečnu **nemusí!**

Jaký je vztah mezi limitou funkce a limitou posloupnosti?

Příklad.

Uvažujme posloupnost $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, jejíž n -tý člen má tvar

$$a_n = \sin(\pi n).$$

Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0,$$

ale

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin(\pi x) \text{ neexistuje.}$$

Limita funkce vs. limita posloupnosti

Klíčová věta 4.8 (Heine)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r > 0$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ a f je funkce definovaná alespoň na $P(a, r)$.
Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

(i) Platí $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$.

(ii) Pro každou posloupnost $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bodů z $P(a, r)$, která splňuje
 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

- „Posloupností bodů z $P(a, r)$ “ myslíme takovou posloupnost $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, že
 $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in P(a, r)$.
- **Pozor!** Rozlišujte mezi **posloupností argumentů** $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a **posloupností hodnot** $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$.
- V podmínce (ii) je zásadní, že to platí pro **každou** posloupnost $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ splňující dané požadavky.

Limita funkce vs. limita posloupnosti

Uvedme pro pořádek ještě jednostranné verze Heineho věty.

Věta 4.9 (Heine, jednostranná verze)

*Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r > 0$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ a f je funkce definovaná alespoň na $P_{\pm}(a, r)$.
Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:*

- (i) *Platí $\lim_{x \rightarrow a_{\pm}} f(x) = L$.*
- (ii) *Pro každou posloupnost $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bodů $z P_{\pm}(a, r)$, která splňuje $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, platí*
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L.$$

Symbol „ $\pm$ “ zde jako obvykle znamená, že si můžete vybrat levou nebo pravou stranu, ale na všech místech stejnou.

Limita funkce vs. limita posloupnosti

Heineho věta a V 4.7 mají společně následující důsledek.

Důsledek 4.10 (charakterizace funkce nemající limitu)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r > 0$ a f je funkce definovaná alespoň na $P(a, r)$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) Funkce f nemá v bodě a limitu.*
- (ii) Existuje posloupnost $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bodů z $P(a, r)$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ a zároveň taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ neexistuje.*
- (iii) Existují posloupnosti $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bodů z $P(a, r)$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ a zároveň takové, že existují obě limity $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$, ale nerovnaj se navzájem.*

Limita funkce vs. limita posloupnosti

Opět můžeme uvážit i jednostrannou verzi:

Důsledek 4.11 (charakterizace funkce nemající jednostrannou limitu)

Nechť $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $r > 0$ a f je funkce definovaná alespoň na $P_{\pm}(a, r)$. Potom jsou následující podmínky ekvivalentní:

- (i) $\lim_{x \rightarrow a_{\pm}} f(x)$ neexistuje.*
- (ii) Existuje posloupnost $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bodů z $P_{\pm}(a, r)$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ a zároveň taková, že $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ neexistuje.*
- (iii) Existují posloupnosti $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bodů z $P_{\pm}(a, r)$ splňující $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ a zároveň takové, že existují obě limity $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n)$, ale nerovnaj se navzájem.*

Pozorování.

Pomocí Heineho věty, resp. Důsledku 4.10, lze snadněji dokázat, že funkce nemá v daném bodě limitu.

Příklad.

Dokažme, že funkce

$$x \mapsto \sin \frac{1}{x}$$

nemá limitu v nule zprava.

Toto umíme udělat i jinak – přímo z definice limity funkce. Pomocí „špatných posloupností“ je to ale snazší.

Funkce reprezentující posloupnost

Ke každé posloupnosti $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ lze zkonstruovat speciální funkci, která má „stejné limitní vlastnosti“ jako $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Tvrzení 4.12 (konstrukce stupňovité funkce)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost. Definujme funkci $f_a: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tak, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každé $x \in [n, n+1)$ položíme

$$f_a(x) := a_n.$$

Potom platí, že $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, a v takovém případě se obě limity rovnají.

Hodnotu funkce f_a v každém bodě $x \in [1, \infty)$ můžeme zapsat předpisem

$$f_a(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \chi_{[n, n+1)}(x).$$

Díky Tvzení 4.12 dostáváme pro limity posloupností „zdarma“ analogie vět o limitě funkce.

Následující věty lze ale samozřejmě také dokázat přímo z definice limity posloupnosti, zcela analogicky jako u limit funkcí.

Posloupnosti

Věty pro výpočet limit

Věta 4.13 (charakterizace konečné limity posloupnosti)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost a $L \in \mathbb{R}$. Pak jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L;$
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - L| = 0.$

Pozor!

Pro **nekonečnou** limitu toto **nelze** udělat.

Klíčová věta 4.14 (limity základních posloupností)

Nechť $a \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^a = \begin{cases} 0, & a < 0; \\ 1, & a = 0; \\ \infty, & a > 0; \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \text{neexistuje,} & a \leq -1; \\ = 0, & a \in (-1, 1); \\ = 1, & a = 1; \\ = \infty, & a > 1. \end{cases}$$

Klíčová věta 4.15 (aritmetika limit)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti a $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B.$$

(i) Je-li $A \pm B$ definovaný výraz, pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n)$ a splňuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B.$$

(ii) Je-li AB definovaný výraz, pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n)$ a splňuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = AB.$$

(iii) Je-li $\frac{A}{B}$ definovaný výraz, pak existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ a splňuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}.$$

Důsledek 4.16 (limita násobku)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost a $c \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot a_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

je-li na pravé straně definovaný výraz.

Slogan:

„Před limitu lze vytknout konstantu.“

Pozor!

Nesmíme před limitu vytýkat nic, co **závisí na n !** (Přesněji na indexu v posloupnosti – ten nemusí být zrovna n .)

Věta 4.17 (součet, součin a podíl konvergentní a nekonvergentní posloupnosti)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti. Nechť $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ má vlastní limitu a limita $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ neexistuje. Potom platí následující.

- (i) Limity posloupností $(a_n \pm b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ neexistují.*
- (ii) Pokud platí $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, pak neexistují limity posloupností $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(a_n / b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.*

Pozorování.

- K tomu, abychom dokázali, že nějaká posloupnost nemá limitu, tuto větu ve skutečnosti nepotřebujeme. Místo ní můžeme najít dvě podposloupnosti s různými limitami nebo podposloupnost bez limity a využít V 4.7.
- Podobně u funkcí nepotřebujeme V 3.26, místo které lze použít Heineho, resp. D 4.10.

Příklad.

Existují limity

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}(-1)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} + (-1)^n?$$

Věta 4.18 (limita a uspořádání)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti splňující

$$a_n \leq b_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho. Nechť obě posloupnosti navíc mají limitu (vlastní nebo nevlastní). Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Dějà vu: Odhady vs. limity

Pozor!

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou jako ve V 4.18, ale splňují dokonce ostrou nerovnost:

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ až na konečně mnoho: } a_n < b_n.$$

Potom obecně dostáváme opět **pouze neostrou nerovnost mezi limity**:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Slogan:

„Limitní přechod dělá z ostrých nerovností neostré.“

Příklad.

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n = 0, b_n = \frac{1}{n}.$$

Klíčová věta 4.19 (sevření / dva policajti)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti splňující

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n.$$

Nechť dále platí

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho. Potom existuje $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ a splňuje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \left(= \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \right).$$

Důsledek 4.20 (součin omezené a mizející posloupnosti)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti. Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je omezená a nechť

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0.$$

Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = 0.$$

Příklad.

Určeme limitu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 3n}{n + \cos 4n}.$$

Věta 4.21 (limita monotonní posloupnosti)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná monotonní posloupnost. Potom má limitu, která splňuje toto:

(i) *Je-li $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ neklesající, potom*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(ii) *Je-li $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nerostoucí, potom*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \inf \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Z této věty vyplývá:

- Každá **monotonní** posloupnost **má limitu**.
- Je-li posloupnost **shora omezená** a **neklesající**, má **vlastní** limitu.
- Je-li posloupnost **zdola omezená** a **nerostoucí**, má **vlastní** limitu.

Věta 4.22 (limita složení funkce a posloupnosti)

Nechť $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost splňující

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b.$$

Nechť g je funkce definovaná alespoň na nějakém prstencovém okolí bodu b a výraz $g(a_n)$ má smysl pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Dále nechť

$$\lim_{y \rightarrow b} g(y) = c$$

a navíc je splněna jedna z podmínek:

- (i) $b \in \mathcal{D}(g)$ a $g(b) = c$ (tedy g je spojitá v b);*
- (ii) existuje $N \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$, $n > N$ platí $a_n \neq b$.*

Potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(a_n) = c.$$

Příklad.

Pomocí předchozí věty určíme limitu (posloupnosti)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{(-1)^n + 3n}{n + \cos 4n}}.$$

Následující tvrzení už nejsou přímou analogií tvrzení o limitě funkce a jsou specifické pro posloupnosti.

Užitečnou vlastností konvergentních posloupností (tj. těch s vlastní limitou), je toto:

Věta 4.23 (omezenost konvergentní posloupnosti)

Každá reálná konvergentní posloupnost je omezená.

Zapomněli jste, co je omezená posloupnost? Podívejte se do Definice 4.3!

Věta 4.24 (Bolzano–Weierstrass)

Z každé omezené reálné posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.

Konec 13. přednášky 4. 11. 2025 14. přednáška pokračuje na straně 320.

Spojité funkce

Nespojitosti

Uvažujme funkci f , která je definovaná na prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$, ale není v tomto bodě spojitá.

Nespojitost může nastat z různých důvodů.

1. typ: odstranitelná nespojitost

Existuje **vlastní** limita

$$L = \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

ale funkce f buď v a není definovaná, nebo $f(a) \neq L$.

Není-li $f(a)$ definováno, lze funkci **spojitě dodefinovat** položením $f(a) := L$.
Nová funkce je **spojitým rozšířením** původní f .

Příklad: funkce

$$x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

2. typ: skok

Existují **vlastní** jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x),$$

ale **nerovnají se**.

V tomto případě v grafu funkce nastává v bodě a „skok“.

Příklad: funkce

$$x \mapsto \chi_{(0,\infty)}(x).$$

3. typ: asymptotická nespojitost

Existují **nevlastní** jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \pm\infty.$$

(Nemusejí se rovnat.)

V tomto případě graf funkce na okolí a připomíná „komín“.

Příklad: funkce

$$x \mapsto \frac{1}{x^2}, \quad x \mapsto \frac{1}{x^3}.$$

4. typ: podstatná nespojitost

Alespoň jedna z limit

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

neexistuje.

Příklad: funkce

$$x \mapsto \sin \frac{1}{x}.$$

Spojité funkce

Důležité vlastnosti spojitých funkcí

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Uvažujme funkce f, g , které jsou na I spojité, a konstantu $c \in \mathbb{R}$.

Už víme (z V 3.24):

- (i)** Součet $f + g$ je opět spojitá funkce na I .
- (ii)** Skalární násobek cf je opět spojitá funkce na I .

Množina všech spojitých reálných funkcí na intervalu je tudíž **vektorový prostor** (nad tělesem $\mathbb{R}$).

Vlastnosti **(i), (ii)** říkají, že je tato množina uzavřená na sčítání a násobení skalárem.

Definice 5.1 (prostor spojitých funkcí na intervalu)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Pak **prostor** všech **spojitých funkcí** na intervalu I značíme symbolem

$$\mathcal{C}(I) \quad \text{nebo} \quad \mathcal{C}^0(I).$$

Podobné značení pak zavedeme i pro prostory diferencovatelných funkcí, které budou podprostory tohoto.

Tvrzení 5.2 (konvergence v uzavřeném intervalu)

Nechť $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ a necht' $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je posloupnost bodů z intervalu $[a, b]$, která má limitu. Potom platí

$$a \leq \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq b.$$

Slogan:

„Z uzavřeného intervalu se nedá vykonvergovat ven.“

Tato vlastnost (formulovaná přesněji) definuje tzv. **uzavřené množiny**. Uzavřené intervaly jsou jejich speciálním případem v $\mathbb{R}$.

Klíčová definice 5.3 (extrém funkce na množině)

Nechť f je funkce definovaná na množině $M \subset \mathbb{R}$ a $\xi \in M$. Řekneme, že funkce f v bodě ξ **nabývá maxima (resp. minima) na množině M** , pokud pro všechna $x \in M \setminus \{\xi\}$ platí

$$f(x) \leq f(\xi) \quad (\text{resp. } f(x) \geq f(\xi)). \quad (20)$$

Je-li nerovnost v (20) ostrá, řekneme, že f nabývá v ξ **ostrého maxima (resp. minima) na M** .

Souhrnně řekneme, že funkce f v bodě ξ **nabývá extrému na M** , pokud tam nabývá svého maxima nebo minima na M . Opět lze uvést, zda je extrém ostrý.

Terminologie: Nechť f nabývá v bodě $\xi \in M$ svého extrému na množině M .

Slovem **extrém** myslíme **funkční hodnotu** $f(\xi)$.

Bod (argument) ξ můžeme nazvat **bodem nabývání extrému** funkce f na množině M .

Pozor!

Funkce f **nemusí** na M vůbec žádného extrému nabývat! Za jistých podmínek se to ale stát musí, viz V 5.5.

Užitečným důsledkem vlastností suprema množiny je to, že v ní lze najít posloupnost, jejíž hodnoty se k supremu „blíží“:

Lemma 5.4 (posloupnosti s limitou rovnou supremu a infimu množiny)

Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$ a nechť $y := \sup M$, $z := \inf M$. Potom existují posloupnosti $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bodů z M takové, že platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z.$$

- Tvrzení platí nezávisle na tom, zda je množina M omezená či ne. Pro shora neomezenou platí $y = \infty$, pro zdola neomezenou $z = -\infty$.

1. důležitá věta o spojitých funkcích

Klíčová věta 5.5 (nabývání extrému spojitě funkce na omezeném uzavřeném intervalu)

Nechť funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Potom funkce f nabývá na $[a, b]$ svého maxima a minima, neboli existují body $\xi_m, \xi_M \in [a, b]$ takové, že

$$f(\xi_m) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \quad f(\xi_M) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

1. důležitá věta o spojitých funkcích

Pozorování.

Žádný z předpokladů Věty 5.5 **nelze** vynechat. Věta **neplatí**, pokud:

- funkce f není spojitá buď v jediném vnitřním bodě intervalu nebo není jednostranně spojitá v jednom z krajních bodů,
- interval není uzavřený,
- interval není omezený.

Konec 15. přednášky 12. 11. 2025

2. důležitá věta o spojitých funkcích

Věta 5.6 (nabývání mezhodnot spojitě funkce)

Nechť f je spojitá funkce na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Nechť $f(a) \leq f(b)$, resp. $f(b) \leq f(a)$. Nechť $c \in [f(a), f(b)]$, resp. $c \in [f(b), f(a)]$. Potom existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že platí

$$f(\xi) = c.$$

- Bez předpokladu spojitosti Věta 5.6 **neplatí**.
- Jelikož $c \in [f(a), f(b)]$, resp. $c \in [f(b), f(a)]$, může být zvoleno libovolně, věta říká, že funkce f nabývá na $[a, b]$ **všech** mezhodnot mezi $f(a)$ a $f(b)$.
- Vlastnosti nabývání mezhodnoty se také říká **Darbouxova vlastnost**. Viz též Větu 7.7.

2. důležitá věta o spojitých funkcích

Ekvivalentní formulace V 5.6:

Je-li f spojitá na $[a, b] \subset \mathbb{R}$, potom platí

$$\forall c \in [\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}] \exists \xi \in [a, b]: f(\xi) = c;$$

neboli

$$\underbrace{[\min\{f(a), f(b)\}, \max\{f(a), f(b)\}]}_{\text{uzavřený interval}} \subset \mathcal{R}(f|_{[a,b]}).$$

2. důležitá věta o spojitých funkcích

Důsledek 5.7 (nulový bod spojitě funkce mění znaménko)

Je-li funkce f spojitá na $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a platí $f(a) \cdot f(b) < 0$, potom f nabývá v intervalu (a, b) nulové hodnoty.

Důsledek 5.8 (spojitý obraz intervalu)

Je-li f spojitá funkce a $I \subset \mathcal{D}(f)$ je interval, potom $f(I)$ je interval nebo jednobodová množina.

3. důležitá věta o spojitých funkcích

Věta 5.9 (inverze spojitě funkce)

Nechť f je spojitá funkce definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom platí:

- (i) Funkce f je prostá právě tehdy, když je ryze monotonní.*
- (ii) Je-li f prostá, potom je její inverzní funkce spojitá.*

Bez předpokladu spojitosti funkce f Věta 5.9 **neplatí**.

Derivace

Definice a základní vlastnosti

Klíčová definice 6.1 (derivace funkce)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na nějakém okolí bodu x_0 .

Derivací funkce f v bodě x_0 nazveme limitu

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pokud tato existuje. Používáme také značení

$$\frac{df}{dx}(x_0) := f'(x_0).$$

Řekneme, že funkce f je v bodě x_0 **diferencovatelná**, má-li v tomto bodě vlastní derivaci $f'(x_0)$.

Řekneme, že f je **diferencovatelná na otevřeném intervalu** $I \subset \mathbb{R}$, pokud je diferencovatelná v každém bodě $z I$. Je-li toto splněno, definujeme **derivaci funkce f** (bez přívlastku „v bodě“) jako funkci

$$\begin{aligned} f' : I &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

Klíčová definice 6.2 (jednostranná derivace funkce)

Nechť $x_0 \in \mathbb{R}$ a f je funkce definovaná na nějakém levém okolí bodu x_0 .

Derivací funkce f v bodě x_0 zleva nazveme limitu

$$f'_-(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0_-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

pokud tato existuje.

Je-li f definována na nějakém pravém okolí bodu x_0 , analogicky definujeme **derivací funkce f v bodě x_0 zprava**.

Důležitá pozorování:

- Derivace diferencovatelné funkce **v bodě** je reálné **číslo**. Derivace funkce (bez přívlastku) je **funkce**, která každému bodu z otevřeného intervalu přiřazuje derivaci původní funkce v tomto bodě.
- Limitu v definici lze (z LSF) ekvivalentně zapsat jako

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

analogicky pro jednostranné.

- Derivace **vyžaduje**, aby funkce byla definována na okolí bodu x_0 , tedy i **přímo v bodě** x_0 . To je rozdíl oproti limitě, která požaduje pouze jednostranné okolí.

Důležitá pozorování:

- Derivace v bodě reprezentuje „okamžitou změnu“ hodnoty funkce v tomto bodě.
- Geometrickým významem derivace $f'(x)$ je směrnice tečny ke grafu funkce f vedené bodem $(x, f(x))$, tedy tangens úhlu svíraného touto tečnou a horizontální osou. Formální definice pojmu „tečna“ ovšem sama o sobě využívá pojmu derivace (viz D 6.23).

Důležitá pozorování:

- Se symbolem $\frac{df}{dx}$ lze za určitých okolností pracovat jako s podílem. (Využití: derivace složené funkce, substituce v integrálu.)
- Derivace v bodě, i jednostranná, může být vlastní i nevlastní nebo nemusí existovat.
- Derivace v bodě existuje právě tehdy, když existují obě jednostranné derivace tamtéž a rovnají se. Toto platí i pro nevlastní derivace a vyplývá to z Tvzení 3.7, jelikož derivace je jistá limita.

Příklad.

Pomocí definice určíme derivaci funkce

$$x \mapsto \sqrt[3]{x}$$

v bodě 0.

Můžeme stručněji psát

$$\begin{array}{lll} (\sqrt[3]{x})' & \text{nebo} & \frac{d}{dx} \sqrt[3]{x} \qquad \text{místo } (x \mapsto \sqrt[3]{x})', \\ (\sqrt[3]{x})' \Big|_{x=0} & \text{nebo} & \frac{d}{dx} \sqrt[3]{x} \Big|_{x=0} \qquad \text{místo } (x \mapsto \sqrt[3]{x})'(0). \end{array}$$

Nebudeme ale psát nic jako

$$(\sqrt[3]{0})' \quad \textbf{NE!}$$

Tvrzení 6.3 (derivace sudé a liché funkce)

Nechť f je funkce diferencovatelná na intervalu $(-b, b)$, kde $b \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$. Pak platí:

- (i) Je-li funkce f sudá, pak je její derivace f' lichá.*
- (ii) Je-li funkce f lichá, pak je její derivace f' sudá.*

Klíčová věta 6.4 (derivace elementárních funkcí)

Derivace konstantní funkce je nulová v každém bodě $z \mathbb{R}$. Derivace dalších elementárních funkcí (vůči proměnné x) mají následující tvary:

$$(x^p)' = px^{p-1} \quad \text{pro } x \in \begin{cases} \mathbb{R}, & p \in \left\{ 1 + \frac{r}{q} \mid r, q \in \mathbb{N}, q \text{ liché} \right\} \cup \{1\}; \\ \mathbb{R} \setminus \{0\}, & p \in \left\{ 1 - \frac{r}{q} \mid r, q \in \mathbb{N}, q \text{ liché} \right\}; \\ (0, \infty), & p \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

$$(e^x)' = e^x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

$$(\sin x)' = \cos x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

$$(\cos x)' = -\sin x \quad \text{pro } x \in \mathbb{R}.$$

Otázka:

Proč jsou ve V 6.4 tak komplikované podmínky u derivace funkce $x \mapsto x^p$?

Víme (viz Def. 2.12), že racionální mocniny, kde $p = \frac{r}{q}$, $r \in \mathbb{Z}$ a q je liché, jsou definované i pro záporné argumenty. Chceme, aby věta obsahovala i tvar derivace takovýchto funkcí v záporných bodech.

Například z věty vyplývá, že

$$\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' \Big|_{x=-2} = \frac{4}{3}(-2)^{\frac{1}{3}}.$$

Věta 6.5 (vztah diferencovatelnosti a spojitosti)

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}$ (tj. existuje tam její vlastní derivace). Potom je f v bodě x spojitá.

Pozor!

Větu nelze obrátit ani v ní nelze vypustit předpoklad vlastní derivace:

- Je-li funkce v bodě spojitá, **nemusí** tam mít derivaci, a to ani jednostrannou a/nebo nevlastní.
- Má-li funkce v bodě **nevlastní** derivaci, **může, ale nemusí** tam být spojitá.

Příklad.

Zkoumejme spojitost a derivaci následujících funkcí v bodě 0:

$$x \mapsto \sqrt[3]{x},$$

$$x \mapsto \operatorname{sgn} x,$$

$$x \mapsto |x|.$$

Příklad.

Univerzální protipříkladová funkce definovaná na $\mathbb{R}$ předpisem

$$u(x) := \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

nemá v nule limitu ani z jedné strany.

Funkce definovaná na $\mathbb{R}$ předpisem

$$u_1(x) := xu(x)$$

je v nule spojitá, ale **nemá tam derivaci** ani z jedné strany.

Funkce definovaná na $\mathbb{R}$ předpisem

$$u_2(x) := x^2u(x)$$

má v nule nulovou **derivaci** (a je tam tudíž také spojitá).

Klíčová věta 6.6 (aritmetika derivací)

Nechť f, g jsou funkce diferencovatelné v bodě $x \in \mathbb{R}$ a necht' $c \in \mathbb{R}$. Pak jsou funkce $f + g$, cf , fg rovněž diferencovatelné v bodě x a platí:

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x),$$

$$(cf)'(x) = cf'(x),$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Je-li navíc $g(x) \neq 0$, pak je funkce f/g též diferencovatelná v bodě x a platí:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Příklad.

Určeme následující derivace:

$$(x^{2025}e^x)',$$

$$(\sin x + x^2 + 7x)',$$

$$(\operatorname{tg} x)'.$$

Klíčová věta 6.7 (derivace složené funkce)

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $x \in \mathbb{R}$ a funkce g je diferencovatelná v bodě $f(x)$. Potom funkce $g \circ f$ je diferencovatelná v bodě x a platí

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$$

Příklad.

Určeme následující derivace:

$$(\sin(e^x))',$$

$$(\cos(e^{3x+1}))',$$

$$(\cos^3(x^2 + 5)e^{\sin 2x})'.$$

Konec 14. přednášky 11. 11. 2025

Jak vypadají derivace funkcí $\ln$, $\sqrt{}$, $\arctg$ a podobných?

Tyto funkce jsou inverzní k funkcím, jejichž derivace už známe. Souvisí to nějak?

Připomínka (k existenci inverze):

Spojitá funkce na otevřeném intervalu je tam prostá právě tehdy, když je tam ryze monotonní.

Věta 6.8 (derivace inverzní funkce)

Nechť funkce f je spojitá a ryze monotonní na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Nechť f má v bodě $x_0 \in I$ vlastní nenulovou derivaci. Potom inverzní funkce f^{-1} je diferencovatelná v bodě $y_0 := f(x_0)$ a platí

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Klíčová věta 6.9 (derivace logaritmu a cyklometrických funkcí)

Platí:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \text{pro } x \in (0, \infty);$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R};$$

$$(\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \quad \text{pro } x \in \mathbb{R};$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pro } x \in (-1, 1);$$

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{pro } x \in (-1, 1).$$

Derivace obecné mocniny a obecné exponenciály

Příklad.

Definitivně ukažme, že

$$\frac{d}{dx}(x^p) = px^{p-1}$$

pro všechna $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a všechna $x > 0$.

Příklad.

Najděme derivaci

$$\frac{d}{dx}a^x,$$

kde $a > 0$.

15. přednáška pokračuje na straně 307.

Prostor spojitě diferencovatelných funkcí

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Uvažujme funkce f, g , které jsou na I **spojitě diferencovatelné**, tj. jsou tam diferencovatelné a jejich derivace je tam spojitá. Dále nechť $c \in \mathbb{R}$.

Víme (z V 6.6 a V 3.24):

- (i) Součet $f + g$ je opět diferencovatelná funkce na I a $f' + g'$ je tam opět spojitá.
- (ii) Skalární násobek cf je opět diferencovatelná funkce na I a $(cf)'$ je tam opět spojitá.

Množina všech spojitě diferencovatelných reálných funkcí na intervalu je tudíž **vektorový prostor** (nad tělesem $\mathbb{R}$), stejně jako v případě spojitých funkcí.

Stejně tak množina všech funkcí, které jsou na I pouze diferencovatelné (ne nutně spojitě), tvoří vektorový prostor.

Definice 6.10 (prostor spojitě diferencovatelných funkcí na intervalu)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Pak značíme

$$\mathcal{C}^1(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je diferencovatelná na } I \text{ \& } f' \in \mathcal{C}(I)\}$$

prostor všech **spojitě diferencovatelných funkcí** na intervalu I .

- Pro jednoduchost bereme otevřený interval, aby mohla mít v každém jeho bodě smysl oboustranná derivace. Lze psát i např. $\mathcal{C}^1([a, b])$ a chápat tam spojitost a derivaci v krajních bodech jako jednostrannou.
- Platí

$$\mathcal{C}^1((a, b)) \subset \mathcal{C}([a, b]).$$

Klíčová definice 6.11 (derivace vyšších řádů)

Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak definujeme

$$f^{(0)}(x_0) := f(x_0).$$

Je-li $k \in \mathbb{N}$ a $f^{(k-1)}(x_0)$ je definováno, definujeme dále

$$f^{(k)}(x_0) := \left(f^{(k-1)}\right)'(x_0),$$

pokud derivace na pravé straně existuje. Hodnotu $f^{(k)}(x_0)$, kde $k \in \mathbb{N}$, nazveme **k -tou derivací (derivací řádu k)** funkce f v bodě x_0 .

Existuje-li $f^{(k)}(x_0)$ vlastní, řekneme, že funkce f je v bodě x_0 **k -krát diferencovatelná**. Existuje-li vlastní $f^{(k)}(x_0)$ pro každé $k \in \mathbb{N}$, řekneme, že funkce f je v bodě x_0 **nekonečněkrát diferencovatelná** nebo **hladká**.

Pozorování.

Aby byla v bodě x_0 k -tá derivace $f^{(k)}(x_0)$ definovaná, je potřeba, aby všechny funkce $f, f', \dots, f^{(k-1)}$ byly definovány na nějakém okolí bodu x_0 .

Pozor!

Rozlišujte striktně mezi různými značeními:

$f^{(k)}$ **k -tá derivace** funkce f

f^k **k -tá mocnina** funkce f

$f(k)$ **hodnota** funkce f v bodě k

Prostor spojitě diferencovatelných funkcí

Definice 6.12 (prostor vícekrát spojitě diferencovatelných funkcí na intervalu)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval a $k \in \mathbb{N}$. Pak značíme

$$\mathcal{C}^k(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je } k\text{-krát diferencovatelná na } I \text{ \& } f^{(k)} \in \mathcal{C}(I)\}$$

prostor všech **k -krát spojitě diferencovatelných funkcí** na intervalu I .

Dále značíme

$$\mathcal{C}^\infty(I) := \{f: I \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ je hladká na } I\}$$

prostor všech **hladkých funkcí** na intervalu I .

Pozorování:

$$\forall k \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{C}^k(I) \subset \mathcal{C}^{k-1}(I),$$

$$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{C}^k(I).$$

Derivace

Věty o střední hodnotě a l'Hospitalovo pravidlo

Tvrzení z dalekosáhlými důsledky

Tvrzení 6.13 (vztah derivace a hodnot funkce na okolí)

Nechť funkce f má v bodě $a \in \mathbb{R}$ derivaci. Je-li $f'(a) > 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a všechna $y \in P_+(a, \delta)$ platí

$$f(x) < f(a) < f(y).$$

Analogicky, je-li $f'(a) < 0$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna $x \in P_-(a, \delta)$ a všechna $y \in P_+(a, \delta)$ platí

$$f(x) > f(a) > f(y).$$

Pozor!

Toto **neimplikuje**, že je f monotonní na $P(a, \delta)$.

Klíčová věta 6.14 (nutná podmínka extrému / Fermat)

Nechť f je funkce definovaná na otevřeném intervalu I a $\xi \in I$. Nabývá-li funkce f v bodě ξ svého extrému na I , potom platí buď

$$f'(\xi) = 0,$$

nebo

$f'(\xi)$ neexistuje.

Tato věta dává pouze **nutnou podmínku** existence extrému. Větu **nelze obrátit!**

$$(f'(\xi) = 0 \vee f'(\xi) \text{ neex.}) \not\Rightarrow \xi \text{ je bod extrému } f.$$

Klíčová věta 6.15 (kandidáti bodů extrému spojitě funkce na uzavřeném omezeném intervalu)

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném omezeném intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Potom tato funkce nabývá svého maxima na $[a, b]$ v bodě $\xi \in [a, b]$, který splňuje jednu z podmínek:

- (i) $f'(\xi) = 0$;
- (ii) $f'(\xi)$ neexistuje;
- (iii) $\xi = a$ nebo $\xi = b$.

Analogické tvrzení platí pro minimum funkce f na $[a, b]$.

- Maxima a minima se za této konstelace nutně nabývá, viz V 5.5.
- Tato věta dává tzv. **kandidáty** bodů extrému. Je-li jich konečný počet, lze z nich určit bod extrému porovnáním funkčních hodnot (více později).

Konec 16. přednášky 18. 11. 2024

1. věta o střední hodnotě

Věta 6.16 (Rolle)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$, má derivaci v každém bodě $z (a, b)$ a splňuje $f(a) = f(b)$. Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že $f'(\xi) = 0$.

- Derivaci může funkce f mít v některých bodech $z (a, b)$ i nevlastní.
- Ani jeden z předpokladů věty **nelze** vypustit.

2. věta o střední hodnotě

Věta 6.17 (Lagrange)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a má derivaci v každém bodě z (a, b) . Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

3. věta o střední hodnotě

Věta 6.18 (Cauchy)

Nechť $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Nechť funkce f, g jsou spojité na $[a, b]$, funkce f má derivaci v každém bodě $z (a, b)$ a funkce g má vlastní nenulovou derivaci v každém bodě $z (a, b)$. Nechť dále platí $g(a) \neq g(b)$. Potom existuje bod $\xi \in (a, b)$ takový, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pozorování.

Věty Rolleova, Lagrangeova a Cauchyho jsou vzájemně ekvivalentní.

Jednostranná derivace v krajním bodě

Věta 6.19 (limita derivace)

Nechť funkce f je spojitá zprava v bodě $a \in \mathbb{R}$ a má derivaci v každém bodě nějakého pravého prstencového okolí bodu a . Nechť dále existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a_+} f'(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Potom má funkce f v bodě a derivaci zprava a platí

$$f'_+(a) = L.$$

- Bez předpokladu spojitosti f věta **neplatí**, uvažte $a = 0$ a funkci

$$f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

- Pokud $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)$ neexistuje, **neznamená to**, že neexistuje $f'_+(a)$! Uvažte $a = 0$ a funkci

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}.$$

- Analogická věta samozřejmě platí pro limitu zleva a oboustrannou.

Příklad.

Tento příklad vyřešíme později s použitím l'Hospitalova pravidla.

Uvažujme funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ danou předpisem

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Najděme její derivaci v bodě 0.

Klíčová věta 6.20 (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť funkce f, g jsou diferencovatelné na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Nechť je splněna jedna z podmínek:

$$(i) \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0;$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty.$$

Nechť dále existuje limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Potom existuje také limita

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

a je rovna L .

- Varianta (i) je typ „ $\frac{0}{0}$ “.
- Varianta (ii) je typ „ $\frac{\text{něco}}{\infty}$ “. Smysl ji má používat v situacích „ $\frac{\infty}{\infty}$ “.
- **Předpoklady** l'Hospitalova pravidla **nelze ignorovat** nebo celou větu jakkoli **obrátit**. Vše vede k nesmyslům, viz dále.

Klíčová věta 6.21 (srovnávací limity mocnin, exponenciály a logaritmu)

Nechť $a \in (1, \infty)$, $p \in (0, \infty)$. Pak platí:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^p} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{\log_a x} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^p \log_a x = 0.$$

Slogan:

„V nekonečnu roste exponenciála se základem větším než 1 podstatně rychleji než jakákoli mocnina a ta zase podstatně rychleji než logaritmus se základem větším než 1.“

Příklad.

Určeme limity

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x^2 + 16x - 12}{x^3 - 12x + 16}.$$

Příklad.

Určeme limity

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x + x^{10}}{2^{2x-3} - x^{13}}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^7(x^2 + 1)}{3x + 2}.$$

Tyto příklady lze vyřešit uderivováním se k smrti nebo chytřejším způsobem.

Příklad.

Určeme limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{2^x - 3} \right)^{\frac{1}{x+1}}.$$

Toto je případ typu „0⁰“. Použijeme standardní první krok:

$$\left(\frac{x}{2^x - 3} \right)^{\frac{1}{x+1}} = e^{\frac{1}{x+1} \ln\left(\frac{x}{2^x - 3}\right)}.$$

V tomto příkladě **nelze použít** srovnávací limitu

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1, \tag{21}$$

která popisuje chování logaritmu na prstencovém **okolí bodu 1** (*sic!*), protože řešení příkladu závisí na chování logaritmu na pravém prstencovém **okolí nuly**. To **nelze nijak převést** na situaci v (21)!

Konec 17. přednášky 18. 11. 2024

l'Hospital: odstrašující příklady

Pro použití l'Hospitala je **nutné**, aby byla splněna **podmínka (i) nebo (ii)**.

Pokud toto neplatí, „použití“ l'Hospitala dává nesmysly.

Příklad.

$$\frac{3}{5} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 3}{x + 5} \neq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{1} = 2.$$

l'Hospital: odstrašující příklady

Smysl l'Hospitalova pravidla **nelze** nijak **obracet**.

Pokud

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

neexistuje, neznamená to, že neexistuje limita původního podílu

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

l'Hospital: odstrašující příklady

Příklad.

Uvažujme $f(x) := x + \sin x$, $g(x) := x + \cos x$. Pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{1 + \cos x}^{f'(x)}}{\underbrace{1 - \sin x}_{g'(x)}} \text{ neexistuje,}$$

výraz v limitě dokonce není ani definován na žádném prstencovém okolí nekonečna.

Nicméně:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overbrace{x + \sin x}^{f(x)}}{\underbrace{x + \cos x}_{g(x)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1$$

použitím věty o polícajtech, resp. Důsledku 3.29, a aritmetiky limit.

l'Hospital: odstrašující příklady

V l'Hospitalovi je **podíl derivací**, nikoli **derivace podílu**!

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \neq \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)'$$

Použití l'Hospitala a LSF na posloupnosti

Víme:

Pokud

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

a označíme-li

$$\forall n \in \mathbb{N}: a_n := f(n), \quad (22)$$

potom platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L.$$

Vhodným přechodem od posloupnosti k funkci můžeme i při hledání limity posloupnosti využít l'Hospitala a Větu 4.22 o limitě složené funkce.

Příklad.

Určeme limitu posloupnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n^7 + 5)}{2n - 1}.$$

Derivace

Taylorova aproximace

Definice 6.22 (faktoriál)

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ definujeme jeho **faktoriál** jako číslo

$$n! := \prod_{k=1}^n k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n.$$

Dále definujeme $0! := 1$.

Tečna a normála ke grafu

Uvažujme funkci f , která je v bodě $a \in \mathbb{R}$ diferencovatelná.

Jaká je rovnice **tečny ke grafu funkce f v bodě a** ?

Připomínka:

Přímka je množina

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha x + \beta y + \gamma = 0\},$$

kde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ a $(\alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0)$.

Definice 6.23 (tečna ke grafu)

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom **tečnou ke grafu funkce f v bodě a** rozumíme přímku danou rovnicí

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Pozorování.

Jedná se opravdu o rovnici přímky:

$$\underbrace{f'(a)}_{\alpha} x + \underbrace{(-1)}_{\beta} y + \underbrace{f(a) - f'(a)a}_{\gamma} = 0.$$

Definice 6.24 (normála ke grafu)

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom **normálou ke grafu funkce f v bodě a** rozumíme přímku danou rovnicí

$$y = f(a) - \frac{1}{f'(a)}(x - a), \quad \text{pokud } f'(a) \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$x = a, \quad \text{pokud } f'(a) = 0.$$

Ekvivalentní definice:

Existuje-li tečna ke grafu funkce f v bodě a , pak normála ke grafu v témže bodě je přímka **kolmá na tečnu a procházející bodem $(a, f(a))$** .

Pozorování.

V souladu se skripty [T] a běžnými matematickými texty neuvažujeme tečnu ke grafu funkce v bodě, kde má funkce nevlastní derivaci.

Aproximace funkce polynomem

Nechť funkce f je „dostatečněkrát“ diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$.

Cíl:

Najít polynom, který funkci f na okolí bodu a co nejlépe aproximuje.

Proč polynom?

Hodnotu polynomu lze snadno spočítat, jedná se jen o násobení a sčítání.

Proč „dostatečněkrát“ diferencovatelná funkce?

Kvalita aproximace bude záležet na vyšších derivacích funkce.

Jak měřit kvalitu aproximace?

Lepší aproximace dává menší chybu (tzv. zbytek), tedy menší rozdíl mezi skutečnou a aproximativní hodnotou.

Značení:

Budeme konstruovat polynom, který nějak závisí na funkci f a bodě a a jehož stupeň je nejvýše n .

Tento polynom budeme proto značit jako $T_{a,n}f$. Tato skupina symbolů je nedělitelná (a **nejedná** se zde o součin funkcí) a označuje polynom jakožto funkci.

Funkční hodnotu tohoto polynomu v bodě x značíme $T_{a,n}f(x)$ nebo $(T_{a,n}f)(x)$.

0. krok:

Uvažujme **konstantní funkci** (polynom stupně 0) danou předpisem

$$T_{a,0}f(x) := f(a).$$

Je-li funkce f v bodě a spojitá, pak platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_{a,0}f(x)}{(x - a)^0} = 0$$

a samozřejmě také $T_{a,0}f(a) = f(a)$. Zároveň žádná jiná konstantní funkce tyto vlastnosti nemá.

Aproximace funkce polynomem

1. krok:

Uvažujme **polynom stupně nejvýše 1** daný předpisem

$$T_{a,1}f(x) := f(a) + c_1(x - a),$$

kde $c_1 \in \mathbb{R}$ je konstanta. Je-li funkce f je v bodě a diferencovatelná, pak volbou

$$c_1 := f'(a)$$

dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_{a,1}f(x)}{(x - a)^1} = 0$$

a zároveň $(T_{a,1}f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro $k \in \{0, 1\}$. Žádná jiná afinní funkce tyto vlastnosti nemá.

To je lepší aproximace než předchozí případ. Lze jít dále?

Aproximace funkce polynomem

2. krok:

Uvažujme **polynom stupně nejvýše 2** daný předpisem

$$T_{a,2}f(x) := f(a) + f'(a)(x - a) + c_2(x - a)^2,$$

kde $c_2 \in \mathbb{R}$ je konstanta. Je-li funkce f je v bodě a dvakrát diferencovatelná, pak volbou

$$c_2 := \frac{f''(a)}{2}$$

dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_{a,2}f(x)}{(x - a)^2} = 0$$

a zároveň $(T_{a,2}f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro $k \in \{0, 1, 2\}$. Žádná jiná kvadratická funkce tyto vlastnosti nemá.

To je opět lepší aproximace než předchozí případ. Zkusíme ještě jeden krok.

Aproximace funkce polynomem

3. krok:

Uvažujme **polynom stupně nejvýše 3** daný předpisem

$$T_{a,3}f(x) := f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + c_3(x-a)^3,$$

kde $c_3 \in \mathbb{R}$ je konstanta. Je-li funkce f je v bodě a třikrát diferencovatelná, pak volbou

$$c_3 := \frac{f'''(a)}{3!}$$

dostáváme

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_{a,3}f(x)}{(x-a)^3} = 0$$

a zároveň $(T_{a,3}f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pro $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Žádná jiná kubická funkce tyto vlastnosti nemá.

Nyní už máme představu, jak dál pokračovat.

Klíčová definice 6.25 (Taylorův polynom)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f je n -krát diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom **Taylorovým polynomem funkce f řádu n o středu a** nazýváme funkci

$$T_{a,n}f(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

V tomto kontextu používáme konvenci $0^0 := 1$, aby byla funkce $T_{a,n}f$ definována v bodě a .

Pozor!

Konvenci „ $0^0 := 1$ “ používáme **výhradně**, je-li to výslovně uvedeno. V jiných případech ne! (**Zejména ne** u limit funkcí tvaru „ $f(x)^{g(x)}$ “.)

Taylorův polynom

Poznámky k definici Taylorova polynomu:

- Derivace funkce f pro Taylora **počítáme v bodě a** . Dávají **koefficienty polynomu** a **mohou být i nulové**.
- Proměnná x , **nikoli a** , je argumentem funkce $T_{a,n}f$.
- Funkce $T_{a,n}f$ je opravdu **polynom** stupně nejvýše n (může se stát i to, že $\deg T_{a,n}f < n$). Každý polynom tvaru

$$P(x) = \sum_{k=0}^n b_k x^k$$

lze pro jakékoli $a \in \mathbb{R}$ přepsat do tvaru

$$P(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x - a)^k$$

a naopak.

- Taylorův polynom **o středu 0** se někdy nazývá **Maclaurinův polynom**.

Lemma 6.26 (derivate Taylorova polynomu)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f je n -krát diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom platí

$$(T_{a,n}f)' = T_{a,n-1}(f'),$$

tedy derivate Taylorova polynomu řádu n funkce f o středu a je Taylorovým polynomem řádu $(n - 1)$ funkce f' o tomtéž středu a . Je-li dále $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, dostáváme

$$(T_{a,n}f)^{(k)} = T_{a,n-k}(f^{(k)}).$$

Klíčová věta 6.27 (Taylor)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f je n -krát diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$. Potom

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_{a,n}f(x)}{(x - a)^n} = 0$$

a pro všechna $k \in \{0, \dots, n\}$ platí

$$(T_{a,n}f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a).$$

Navíc je $T_{a,n}f$ jediný polynom stupně nejvýše n , který tyto podmínky splňuje.

Aproximace Taylorovým polynomem

Poznámky k Taylorově větě:

- Věta říká, že polynom uvedených kvalit je **určen jednoznačně**. Je-li tedy P polynom stupně nejvýše n a zároveň platí

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P(x)}{(x - a)^n} = 0,$$

pak už nutně platí $P = T_{a,n}f$.

- Bez předpokladu **dostatečné diferencovatelnosti** Taylor **nefunguje**. Např. funkce

$$x \mapsto |x|, \quad x \mapsto \sqrt[3]{x}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

nemají Taylorův polynom žádného řádu **o středu 0**. S jakýmkoli jiným středem ale ano!

- Je-li P polynom a $n \geq \deg P$, pak $T_{a,n}P = P$ pro jakýkoli střed a .

Klíčová věta 6.28 (Taylorův polynom exponenciály)

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Nechť $f(x) := e^x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Taylorův polynom funkce f řádu n o středu 0 má tvar:

$$T_{0,n}f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

Klíčová věta 6.29 (Taylorův polynom posunutého logaritmu)

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$. Nechť $f(x) := \ln(1+x)$ pro všechna $x \in (-1, \infty)$. Taylorův polynom funkce f řádu n o středu 0 má tvar:

$$T_{0,n}f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n,$$

pokud $n > 0$, a je roven nulové konstantní funkci pro $n = 0$.

Samotný (neposunutý) logaritmus **nelze** aproximovat Taylorovým polynomem **o středu 0**. Logaritmus totiž **není definován na okolí nuly**.

Klíčová věta 6.30 (Taylorův polynom sinu)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ je liché číslo. Nechť $f(x) := \sin x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Taylorovy polynomy funkce f o středu 0 řádu n a $n + 1$ jsou si rovny a mají tvar:

$$T_{0,n}f(x) = T_{0,n+1}f(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n!} x^n.$$

Taylorův polynom řádu 0 funkce f o středu 0 je roven nulové konstantní funkci.

Klíčová věta 6.31 (Taylorův polynom kosinu)

Nechť $n \in \mathbb{N}_0$ je sudé číslo. Nechť $f(x) := \cos x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Taylorovy polynomy funkce f o středu 0 řádu n a $n + 1$ jsou si rovny a mají tvar:

$$T_{0,n}f(x) = T_{0,n+1}f(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!} x^n.$$

Pro funkce f , které jsou **hladké** (mají derivace všech řádů) na nějakém symetrickém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a splňují jisté další podmínky, lze ukázat, že pro všechna x ze zmíněného okolí platí

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Toto je tzv. vyjádření funkce **mocninnou řadou** (více v MA2, KAT) a nazýváme jej **Taylorovým rozvojem funkce f o středu a** .

Součet této řady se pak (na jistém okolí) opravdu rovná původní funkci. Taylorův polynom konečného řádu se ale obecně původní funkci **nerovná**, je to **pouze aproximace**.

Definice 6.32 (zbytek při Taylorově aproximaci)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a funkce f je n -krát diferencovatelná v bodě $a \in \mathbb{R}$. Výraz

$$f(x) - T_{a,n}f(x)$$

nazýváme **zbytkem při Taylorově aproximaci** funkce f řádu n o středu a v bodě x .

- Zbytek je totéž, co **chyba aproximace**, tedy rozdíl mezi skutečnou hodnotou funkce f v bodě x a její aproximací polynomem $T_{a,n}f(x)$.

Věta 6.27 dává:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_{a,n}f(x)}{(x - a)^n} = 0,$$

což lze vágně interpretovat tak, že pro x z „dostatečně malého okolí“ bodu a je chyba/zbytek „výrazně menší než $(x - a)^n$ “.

Otázka:

Lze najít konkrétnější odhad zbytku?

Odpověď:

Ano, má-li funkce f ještě další dodatečné vlastnosti.

Věta 6.33 (Lagrangeův tvar zbytku)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť funkce f je $(n + 1)$ -krát diferencovatelná v každém bodě z $U(a, \delta)$ a nechť $x \in U(a, \delta)$. Potom existuje číslo $\xi \in (a, x)$ (resp. $\xi \in (x, a)$) takové, že platí

$$f(x) - T_{a,n}f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

- Aby toto fungovalo, **musí** být f $(n + 1)$ -krát diferencovatelná **na celém oboustranném okolí** $U(a, \delta)$.
- O čísle ξ víme **pouze**, že leží mezi body x a a . **Není** to ani x , ani a !

Důsledek 6.34 (odhad zbytku při omezené vyšší derivaci)

Nechť $a \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Nechť funkce f je $(n + 1)$ -krát diferencovatelná v každém bodě z $U(a, \delta)$ a nechť $x \in U(a, \delta)$. Pak platí

$$|f(x) - T_{a,n}f(x)| \leq \frac{\sup\{|f^{(n+1)}(y)| \mid y \in U(a, |x - a|)\}}{(n + 1)!} |x - a|^{n+1}.$$

- Toto je k něčemu dobré, jen pokud $\sup\{|f^{(n+1)}(y)| \mid y \in U(a, |x - a|)\} < \infty$.
- Pro elementární funkce (např. exp, ln, sin, cos, $\sqrt{}$) jsme obvykle schopni toto supremum nějak jednoduše shora odhadnout.
- „Neurčitě“ číslo ξ se zde už nevyskytuje.

Příklad.

Spočítejme hodnotu $\sin 1$ s chybou menší než 0,001.

Konec 18. přednášky 19. 11. 2025

Derivace

Průběh funkce

Klíčová věta 6.35 (vztah derivace a monotonie na intervalu)

Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce f je spojitá na I a má v každém bodě $z \in I$ derivaci. Potom platí:

- (i) Je-li $f' > 0$ na I , pak je funkce f na I rostoucí.
- (ii) Je-li $f' \geq 0$ na I , pak je funkce f na I neklesající.
- (iii) Je-li $f' < 0$ na I , pak je funkce f na I klesající.
- (iv) Je-li $f' \leq 0$ na I , pak je funkce f na I nerostoucí.

Větu **nelze** obrátit! Existuje např. **rostoucí** funkce na I , která

- má v nějakém bodě $a \in I$ **nulovou** derivaci, nebo
- v nějakém bodě $a \in I$ **nemá derivaci** vůbec.

Takovýchto bodů může být i spočetně mnoho.

Pozorování.

- Bez předpokladu, že I je interval, V 6.35 neplatí.
- Je-li $f' = 0$ všude na otevřeném intervalu I , je tam f konstantní.
- Mají-li dvě funkce na otevřeném intervalu I stejnou derivaci, je jejich rozdíl na I konstantní.

Klíčová definice 6.36 (lokální extrém)

Nechť f je funkce a $a \in \mathcal{D}(f)$. Řekneme, že funkce f má v bodě a **lokální minimum**, pokud existuje $\delta > 0$ takové, že funkce f nabývá v bodě a svého minima na množině $U(a, \delta) \cap \mathcal{D}(f)$.

Analogicky definujeme **ostré lokální minimum, lokální maximum a ostré lokální maximum**. Každý bod jednoho z uvedených typů označujeme jako **(ostrý) lokální extrém** funkce f .

Pozorování.

Formulace s množinou $U(a, \delta) \cap \mathcal{D}(f)$ umožňuje, aby lokální extrém byl případně i v krajním bodě definičního oboru.

Věta 6.37 (1. postačující podmínka lokálního extrému)

Nechť je funkce f spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a nechť splňuje obě tyto podmínky:

- (i) Existuje levé prstencové okolí bodu a , na němž je f rostoucí.*
- (ii) Existuje pravé prstencové okolí bodu a , na němž je f klesající.*

Potom nabývá funkce f v bodě a svého ostrého lokálního maxima.

- Věta dává **postačující** podmínku pro bod extrému.
- Platí zřejmá analogie věty pro lokální minimum. Větu lze také modifikovat pro krajní bod definičního oboru.
- Bez předpokladu **spojitosti** věta **neplatí!**
- Z předpokladu spojitosti v a plyne automaticky, že je f definována na nějakém okolí tohoto bodu.

Pozorování.

Hledáme-li lokální extrémy funkce f na jejím definičním oboru, podle Věty 6.15 o kandidátech na body extrému dostáváme, že lokální extrém může být **pouze** v bodě $c \in \mathcal{D}(f)$, který splňuje jedno z následujícího:

- $f'(c) = 0$, bod c se v tomto případě nazývá **stacionární**;
- $f'(c)$ neexistuje;
- c je krajní bod $\mathcal{D}(f)$.

Toto je pouze **nutná** podmínka. To, zda funkce v bodě opravdu nabývá lokálního extrému, musíme ověřit z jejího chování na okolí. Obvykle pomůže V 6.37, která naopak dává **postačující** podmínku.

Příklad.

Určeme maximální intervaly monotonie a lokální extrémy funkce dané předpisem

$$f(x) = \operatorname{arctg} |x + 2| - \operatorname{arctg}(x - 2)$$

na jejím definičním oboru.

Maximální interval monotonie je takový, který již nelze rozšířit tak, aby f byla monotonní na rozšířeném intervalu.

Pro **spojité** funkce jsou maximální intervaly monotonie vždy **uzavřené**. (Pamatujte, že např. $(-\infty, 1]$ také považujeme za uzavřený interval.)

Věta 6.38 (2. postačující podmínka lokálního extrému)

Nechť funkce f je definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a platí $f'(a) = 0$.

- (i) Pokud $f''(a) < 0$, nabývá funkce f v bodě a svého ostrého lokálního maxima.*
- (ii) Pokud $f''(a) > 0$, nabývá funkce f v bodě a svého ostrého lokálního minima.*

- Toto je opět **postačující** podmínka, nikoli nutná.
- Chceme, aby funkce byla definovaná na okolí. V krajních bodech tuto větu nelze použít.
- $f''(a)$ může být nevlastní.
- Pokud $f''(a) = 0$ nebo neexistuje, nevíme pořád nic.

Příklad.

Najděme lokální extrémy funkce dané předpisem

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

na jejím definičním oboru.

Příklad.

Najděme lokální extrémy funkce dané předpisem

$$g(x) = (x - 2)^4$$

na jejím definičním oboru.

Nyní budeme hledat **globální extrémy** funkce, tedy extrémy **na množině** (pro jednoduchost to většinou bude interval).

Je-li f **spojitá** a hledáme její extrém na **uzavřeném omezeném** intervalu, použijeme Větu 6.15.

Najdeme **kandidáty** extrému a je-li jich konečný počet, **vybereme** z nich ty body x , ve kterých je $f(x)$ největší, resp. nejmenší.

Příklad.

Určeme extrémy funkce dané předpisem

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3|x + 1|$$

na intervalu $[-4, 4]$.

Příklad.

Určeme rozměry obdélníkových vrat o maximální ploše, která lze vyříznout do půlkruhové stěny.

Globální extrémy lze zkoumat i na intervalu (nebo více), který **není uzavřený nebo omezený**.

Příklad.

Vyšetřeme globální extrémy funkce

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \arctg|x+2| - \arctg(x-2). \end{aligned}$$

Využijeme toho, že má-li nějaká hodnota být **globálním** extrémem, **musí být i lokálním** extrémem.

Lokální extrémy pro tuto funkci jsme už našli dříve.

Definice 6.39 (konvexní a konkávní funkce)

Nechť funkce f je definovaná na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je na intervalu I

- (i) **konvexní**, pokud pro všechna $x, y, z \in I$ splňující $x < y < z$ platí

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}. \quad (23)$$

- (ii) **konkávní**, pokud pro všechna $x, y, z \in I$ splňující $x < y < z$ platí

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}. \quad (24)$$

Řekneme, že funkce f je na intervalu I **ryze konvexní**, resp. **ryze konkávní**, platí-li v (23), resp. v (24) ostrá nerovnost.

Slogan:

„Graf konvexní funkce se stáčí nahoru. Graf konkávní funkce se stáčí dolů.“

Věta 6.40 (ekvivalentní charakterizace konvexity)

- (i) Funkce f je na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ konvexní právě tehdy, když pro každá $x, y \in I$ splňující $x < y$ a pro každé $\lambda \in (0, 1)$ platí

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \quad (25)$$

Pro ryzí konvexitu uvažujte ostrou nerovnost v (25).

- (ii) Funkce f je na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ konkávní právě tehdy, když pro každá $x, y \in I$ splňující $x < y$ a pro každé $\lambda \in (0, 1)$ platí

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \geq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y). \quad (26)$$

Pro ryzí konkavitu uvažujte ostrou nerovnost v (26).

Slogan:

„Graf konvexní funkce leží pod sečnou. Graf konkávní funkce leží nad sečnou.“

Pozor!

Konvexita funkce f nijak **nesouvisí s monotoníí samotné funkce f .**

S **monotoníí** její **derivace** ale už ano.

Věta 6.41 (vztah druhé derivace a konvexity)

Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Nechť $f''(c)$ existuje v každém $c \in (a, b)$.

(i) *Pokud*

$$\forall c \in (a, b): \quad f''(c) \geq 0 \quad (\text{resp. } f''(c) > 0),$$

pak je funkce f konvexní (resp. ryze konvexní) na (a, b) .

(ii) *Pokud*

$$\forall c \in (a, b): \quad f''(c) \leq 0 \quad (\text{resp. } f''(c) < 0),$$

pak je funkce f konkávní (resp. ryze konkávní) na (a, b) .

- $f''(c)$ může být nevlastní.
- Pokud bychom navíc požadovali $f''(c)$ vlastní ve všech bodech $c \in (a, b)$, byla by první derivace na (a, b) automaticky spojitá.

Věta 6.42 (jednostranné derivace konvexní funkce)

Nechť funkce f je konvexní na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom má v každém bodě $a \in I$ vlastní jednostranné derivace zleva i zprava.

- Jako obvykle nelze větu obrátit. Například funkce

$$x \mapsto e^{-|x|}$$

má v bodě 0 obě vlastní jednostranné derivace, ale není konvexní na žádném otevřeném intervalu obsahujícím bod 0.

- Přířímým důsledkem je následující Věta 6.43.

Věta 6.43 (vztah konvexity a spojitosti)

Nechť funkce f je konvexní na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom je na tomto intervalu spojitá.

- Větu **nelze obrátit:**

spojitost $\nRightarrow$ konvexita.

- Bez předpokladu otevřenosti věta neplatí.
- Věta platí i pro konkávní funkce. Ryzost nehraje roli.

Konec 19. přednášky 25. 11. 2025

20. přednáška pokračuje na straně 421.

Definice 6.44 (inflexní bod)

Nechť funkce f je definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f má v bodě a **inflexní bod**, pokud jsou splněny všechny následující podmínky:

- (i) funkce f je v bodě a spojitá;
- (ii) funkce f má v bodě a derivaci;
- (iii) existují dvě jednostranná prstencová okolí bodu a taková, že na jednom z nich je f ryze konvexní a na druhém ryze konkávní.

- V inflexním bodě „přechází konvexita v konkavitu“.
- Funkce může mít v inflexním bodě i **nevlastní** derivaci, musí tam ale být **spojitá**.
- Naše definice odpovídá skriptům [T]. Skripta [4H] obsahují odlišnou definici, tou se zabývat nebudeme.

Věta 6.45 (nutná podmínka inflexe)

Nechť funkce f je definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Má-li funkce f v bodě a inflexi, potom buď $f''(a) = 0$, nebo $f''(a)$ neexistuje.

Věta 6.46 (postačující podmínka inflexe)

Nechť funkce f je definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Pokud $f''(a) = 0$ a $f'''(a) \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$, pak má f v bodě a inflexi.

Příklad.

Uvažujme funkce dané předpisy:

$$f(x) := x^3, \quad g(x) := x^4, \quad h(x) := \sqrt[3]{x}.$$

Jak vypadají jejich druhé derivace v bodě 0? Mají v tomto bodě inflexi?

Definice 6.47 (asymptota v nevlastním bodě)

Nechť funkce f je definovaná na prstencovém okolí bodu $\pm\infty$. Řekneme, že funkce f má v $\pm\infty$ **asymptotu**, pokud existují čísla $p, q \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - px - q) = 0.$$

Uvedenou asymptotou pak rozumíme přímku

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = px + q\}.$$

Slogan:

„Asymptota v nevlastním bodě je graf afinní funkce, ke kterému se graf původní funkce v tomto nevlastním bodě blíží.“

Pozor!

Asymptota v $\pm\infty$ vůbec **nemusí existovat!**

Věta 6.48 (charakterizace asymptoty v nevlastním bodě)

Nechť funkce f je definovaná na prstencovém okolí bodu $\pm\infty$. Pak má funkce f v bodě $\pm\infty$ asymptotu danou rovnicí

$$y = px + q$$

právě tehdy, když platí

$$p = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R} \quad \& \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - px) \in \mathbb{R}. \quad (27)$$

- Toto dává návod k nalezení asymptoty.
- Pokud jedna z limit v (27) neexistuje nebo je nevlastní, funkce v daném a asymptotu **nemá**.
- Má-li funkce v $\pm\infty$ asymptotu, pak se tato nazve **vodorovná**, pokud $p = 0$, a **šikmá**, pokud $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Definice 6.49 (asymptota ve vlastním bodě)

Nechť funkce f je definovaná alespoň na jednostranném prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Má-li funkce f v a alespoň jednu nevlastní jednostrannou limitu, řekneme, že má tato funkce v bodě a **svislou asymptotu**.

Touto asymptotou pak rozumíme přímku

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = a\}.$$

- Rozdíl oproti předchozímu je to, že a je **vlastní** bod a asymptota je svislá přímka.
- Toto odpovídá situaci, kdy má graf tvar „komína“.

Příklad.

Určeme všechny asymptoty funkce dané předpisem

$$f(x) := \frac{x^2 + 4x + e^{-x}}{5x - 15}.$$

Neurčitý integrál

Definice a základní vlastnosti

Primitivní funkce

Nechť $(a, b) \in \mathbb{R}$ je otevřený interval.

Víme:

Je-li F diferencovatelná funkce na (a, b) , existuje funkce f taková, že

$$\forall x \in (a, b): f(x) = F'(x).$$

Tedy k funkci F najdeme její derivaci $f = F'$.

Primitivní funkce

Nechť $(a, b) \in \mathbb{R}$ je otevřený interval.

Víme:

Je-li F diferencovatelná funkce na (a, b) , existuje funkce f taková, že

$$\forall x \in (a, b): f(x) = F'(x).$$

Tedy k funkci F najdeme její derivaci $f = F'$.

Otázky:

- Lze tuto operaci obrátit, tedy k dané funkci f najít F takovou, aby platilo

$$\forall x \in (a, b): F'(x) = f(x)?$$

- Pokud ano, pro jaké funkce to jde?
- Může existovat víc funkcí F , které toto splňují?

Klíčová definice 7.1 (primitivní funkce)

Nechť funkce f je definovaná na otevřeném intervalu (a, b) . Řekneme, že funkce f má na (a, b) **primitivní funkci**, existuje-li diferencovatelná funkce F definovaná na (a, b) taková, že platí

$$\forall x \in (a, b): F'(x) = f(x).$$

V takovém případě tedy řekneme, že funkce F je **primitivní funkcí k funkci f na (a, b)** .

Slogan:

„Primitivní funkce je to, co musíme zderivovat, abychom dostali zadanou funkci.“

Je primitivní funkce jednoznačně určena?

Snadné příklady:

- Funkce $x \mapsto -\cos x$ je primitivní k funkci $x \mapsto \sin x$ na $\mathbb{R}$.
- Funkce $x \mapsto x^3$ je primitivní k funkci $x \mapsto 3x^2$ na $\mathbb{R}$.
- Funkce $x \mapsto \arcsin x$ je primitivní k funkci $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $(-1, 1)$.

Je primitivní funkce jednoznačně určena?

Snadné příklady:

- Funkce $x \mapsto -\cos x$ je primitivní k funkci $x \mapsto \sin x$ na $\mathbb{R}$.
- Funkce $x \mapsto x^3$ je primitivní k funkci $x \mapsto 3x^2$ na $\mathbb{R}$.
- Funkce $x \mapsto \arcsin x$ je primitivní k funkci $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ na $(-1, 1)$.

Pozorování.

Uvažujme funkce dané na $\mathbb{R}$ předpisy

$$F_0(x) = -\cos x, \quad F_1(x) = -\cos x + 1, \quad F_2(x) = -\cos x + 2.$$

Potom pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí

$$F'_0(x) = F'_1(x) = F'_2(x) = \sin x,$$

Tedy každá z funkcí F_0, F_1, F_2 je primitivní na $\mathbb{R}$ k funkci $x \mapsto \sin x$.

Na $\mathbb{R}$ se tyto funkce vzájemně liší **o konstantu**.

Je primitivní funkce jednoznačně určena?

Věta 7.2 (rozdíl primitivních funkcí)

Nechť funkce F_1, F_2 jsou primitivní k funkci f na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ taková, že pro všechna $x \in I$ platí

$$F_1(x) - F_2(x) = c.$$

- Konstanta je **stejná** pro **všechna** $x \in I$. Kvantifikátory jsou „v Čingischánově pořadí“:

$$\exists c \in \mathbb{R} \forall x \in I: F_1(x) - F_2(x) = c.$$

- Pokud I není interval, věta obecně **neplatí**.

Klíčová definice 7.3 (neurčitý integrál)

Nechť funkce f má na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ primitivní funkci. Potom **neurčitým integrálem** funkce f na I rozumíme množinu

$$\int f(x) \, dx := \{F + c \mid c \in \mathbb{R}\},$$

kde F je libovolná primitivní funkce k funkci f na I .

- Definice je bezesporná, z V 7.2 víme, že libovolné dvě primitivní funkce k téže funkci se liší o konstantu.
- Neurčitý integrál je tedy formálně **množina funkcí**.

Značení:

$$\int f = \int f(x) \, dx = F(x) + c, \quad \text{PF na } I.$$

Pozor!

Ve výsledcích příkladů **vždy zapisujeme intervaly**, na kterých je zjištěná funkce primitivní k původní. To je netriviální součástí výsledku!

Příklad.

Určeme

$$\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x}.$$

Varianta vpravo je běžný zkrácený zápis takovýchto zlomků.

Toto tvrzení je zřejmým důsledkem definice neurčitého integrálu a V 7.2.

Tvrzení 7.4 (integrování derivace)

Nechť funkce f je diferencovatelná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potom na tomto intervalu platí

$$\int f'(x) \, dx = f(x) + c.$$

Klíčová věta 7.5 (neurčité integrály mocnin)

(i) *Nechť $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Potom platí*

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + c \quad (28)$$

na intervalu $(0, \infty)$.

(ii) *Nechť $p = -\frac{r}{q}$, kde $r \in \mathbb{N}$, $q \in \mathbb{N}$ je liché a $r \neq q$. Potom (28) platí na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.*

(iii) *Nechť $p = \frac{r}{q}$, kde $r \in \mathbb{N}_0$ a $q \in \mathbb{N}$ je liché. Potom (28) platí na celém $\mathbb{R}$.*

(iv) *Platí*

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + c$$

na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$.

Klíčová věta 7.6 (neurčité integrály elementárních funkcí)

Na množině $\mathbb{R}$ platí:

$$\int e^x dx = e^x + c,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c,$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + c.$$

Na intervalu $(-1, 1)$ platí:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c.$$

Které funkce mají primitivní funkce?

Pozorování.

- Funkce $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci na $\mathbb{R}$ ani žádném otevřeném intervalu obsahujícím 0.

Které funkce mají primitivní funkce?

Pozorování.

- Funkce $x \mapsto \operatorname{sgn} x$ nemá primitivní funkci na $\mathbb{R}$ ani žádném otevřeném intervalu obsahujícím 0.

- Funkce

$$x \mapsto \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

má primitivní funkci na $\mathbb{R}$ (i když zatím nevíme proč).

Otázka:

Co chybí funkci signum? K jakým funkcím lze najít primitivní funkci?

Věta 7.7 (Darboux)

*Nechť funkce f má primitivní funkci na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$.
Nechť $[a, b] \subset I$. Potom pro každou hodnotu $y \in [f(a), f(b)]$, resp.
 $y \in [f(b), f(a)]$, existuje $\xi \in [a, b]$ takové, že $f(\xi) = y$.*

- Jinak řečeno, je-li funkce f derivací nějaké funkce na otevřeném intervalu, pak na kterémkoli jeho uzavřeném podintervalu $[a, b]$ **nabývá všech mezihodnot** mezi $f(a)$ a $f(b)$.
- Toto je **nutná** podmínka, nikoli postačující. Funkce může nabývat všech mezihodnot a přesto nemít primitivní funkci.
- Vlastnosti nabývání mezihodnot se též říká **Darbouxova vlastnost**. Víme, že tuto vlastnost mají také spojitě funkce (viz V 5.6).
- Má-li funkce f primitivní funkci, **nemusí být ale sama f spojitá**.

Věta 7.8 (existence primitivní funkce ke spojité funkci)

Nechť je funkce f spojitá na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Pak tam má primitivní funkci.

- Toto je **postačující** podmínka, nikoli nutná. I nespojitá funkce může mít primitivní funkci.
- Bohužel ne každou spojitou funkci jsme schopni analyticky zintegrovat (tedy najít primitivní v podobě nějakého složení elementárních funkcí).
- Důkaz této věty plyne z tzv. základní věty kalkulu (Věta 8.18).

Neurčitý integrál

Metody výpočtu

Klíčová věta 7.9 (linearity integrování)

Nechť funkce F , resp. G jsou primitivní k funkcím f , resp. g na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Nechť $a \in \mathbb{R}$ je konstanta. Potom platí:

- (i) Funkce $F + G$ je primitivní k funkci $f + g$ na I .*
- (ii) Funkce aF je primitivní k funkci af na I .*

Pozorování.

Z věty vyplývá:

$$\int \sum_{j=1}^n a_j f_j(x) \, dx = \sum_{j=1}^n a_j \int f_j(x) \, dx, \quad \text{PF na } I,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \dots, f_n$ jsou libovolné funkce mající na I primitivní funkci a $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

Příklad.

Najděme

$$\int \left(\sin x + 7x^4 - x^2 - \frac{2}{1+x^2} \right) dx.$$

Při integrování se často využije „půjčování a vracení“ v různých podobách.

Příklad.

Najděme

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx.$$

Pozorování.

Funkce $x \mapsto |x|$ je spojitá na $\mathbb{R}$, má tam tedy primitivní funkci (z V 7.8).

Co je touto primitivní funkcí?

Obecný popis situace:

Někdy jsme schopni najít primitivní funkci k funkci f jen zvlášť na každém z intervalů (a, b) a (b, d) . Je-li f spojitá v bodě b , můžeme tam primitivní funkce na sebe „nalepit“.

Věta 7.10 (lepení primitivních funkcí)

Nechť funkce f je spojitá na otevřeném intervalu $(a, d) \subset \mathbb{R}$, $b \in (a, d)$.
Nechť funkce F_1 , resp. F_2 je primitivní k funkci f na intervalu (a, b) ,
resp. (b, d) . Pak platí:

(i) Existují vlastní limity

$$L_1 := \lim_{x \rightarrow b-} F_1(x), \quad L_2 := \lim_{x \rightarrow b+} F_2(x).$$

(ii) Funkce daná předpisem

$$F(x) := \begin{cases} F_1(x), & x \in (a, b); \\ L_1, & x = b; \\ F_2(x) + L_1 - L_2, & x \in (b, d), \end{cases}$$

je primitivní funkcí k f na celém (a, d) .

Příklad.

Nyní už můžeme určit

$$\int |x| \, dx.$$

V obecném případě se jednostranné limity dílčích primitivních funkcí budou lišit a bude třeba provést posun, viz později.

Klíčová věta 7.11 (integrace per-partes)

Nechť u, v jsou diferencovatelné funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a funkce uv' tam má primitivní funkci. Pak má také funkce $u'v$ na intervalu I primitivní funkci, která tam splňuje

$$\int u'v = uv - \int uv',$$

neboli

$$\int u'(x)v(x) \, dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) \, dx, \quad \text{PF na } I.$$

Typický příklad: eliminace polynomu

Typický integrand:

„polynom · exponenciála (či goniometrická, hyperbolická)“.

„Polynom derivujeme, dokud nezmizí.“

Příklad.

Určeme

$$\int (x + 1)e^x dx, \quad \int (x^2 + x) \sin x dx.$$

Konec 20. přednášky 26. 11. 2025

Typický příklad: cyklické per-partes

Typický integrand: „exponenciála · goniometrická“.

Integrujeme dvakrát per-partes, abychom dostali původní integrál s opačným znaménkem.

Příklad.

Určeme

$$\int e^x \sin x \, dx.$$

Typický příklad: per-partes s doplněnou jedničkou

Typický integrand: inverzní funkce k elementární funkci (logaritmus, cyklo-metrická, hyperbolometrická)

„Integrujeme jedničku, derivujeme zbytek.“

Příklad.

Určeme

$$\int \ln x \, dx.$$

(Na ostatní příklady tohoto typu je třeba navíc substituce.)

Klíčová věta 7.12 (substituce 1. druhu v neurčitém integrálu)

Nechť $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly. Nechť $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ má na intervalu J primitivní funkci F . Nechť $\varphi: I \rightarrow J$ je diferencovatelná funkce. Potom na intervalu I platí

$$\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + c.$$

- Toto je substituce typu „**vidím derivaci**“.
- Funkci původní proměnné t nahrazujeme novou proměnnou x :

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= x, \\ \varphi'(t) dt &= dx.\end{aligned}$$

Ve výsledku musíme opět nahradit proměnnou x výrazem $\varphi(t)$.

- Funkce φ nemusí splňovat nic dalšího, konkrétně nemusí být monotónní. Srovnejte se substitucí 2. druhu (V 7.13).

Typický příklad: „vidím derivaci“

Příklad.

Určeme

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx, \quad \int \sin^3 x \cos x dx.$$

Často je potřeba „půjčit si a vrátit“ konstantu:

Příklad.

Určeme

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx, \quad \int \cos^2 3x \sin 3x dx.$$

Typický příklad: afinní substituce

Typický integrand: $f(ax + b)$, kde primitivní k f známe.

Příklad.

Určeme

$$\int \cos(3x - 2) \, dx, \quad \int \frac{1}{(x + 2)^5} \, dx.$$

Typický příklad: „logaritmický podíl“

Je-li funkce f diferencovatelná na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a F je primitivní k f tamtéž, pak

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$$

na intervalech, které vyvodíme z definičního oboru f a jejích nulových bodů.

Příklad.

Určeme

$$\int \frac{3x - 3}{x^2 - 2x + 1} dx.$$

Varování:

„Jednoduše vypadající“ funkce může mít „složitou“ primitivní funkci, a najít ji může být také složité. Často ji dokonce vůbec nejde analyticky vyjádřit.

Příklad.

$$\int e^{-x^2} dx$$

V praxi se používají přibližné metody **numerické integrace**.

Neurčitý integrál

Integrace racionálních funkcí

Připomínka (Definice 2.16): **Racionální funkce** má tvar

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kde p, q jsou polynomy, a je definována na množině

$$\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid q(x) = 0\}.$$

Je-li **známa faktORIZACE** polynomu q , lze **vždy** analyticky najít primitivní funkci k racionální funkci f , a to na libovolném intervalu (x_1, x_2) , kde x_1, x_2 jsou kořeny polynomu q , mezi kterými se nenachází žádný další jeho kořen.

Tedy

$$\forall x \in (x_1, x_2) : q(x) \neq 0.$$

Ukážeme obecnou metodu, jak to udělat.

Příklad postupně rozebíraný na následujících slajdech:

Hledáme primitivní funkci k racionální funkci dané předpisem

$$f(x) = \frac{2x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 18x^2 + 23x}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4}.$$

Obecný přístup:

Racionální funkce se **rozloží** do **součtu** jednodušších funkcí (polynom + partiální zlomky) a každá z nich se integruje zvlášť.

Dělení polynomů

Je-li

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

kde p, q jsou polynomy takové, že

$$\deg p \geq \deg q,$$

polynomy nejdříve **vydělíme**. Dostaneme:

$$f(x) = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)},$$

kde r, s jsou polynomy a platí

$$\deg s < \deg q.$$

Modelový příklad

1. krok modelového příkladu

Máme:

$$\frac{2x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 18x^2 + 23x}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4} =: \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Protože

$$\deg p = 5 \geq 4 = \deg q,$$

vydělíme:

$$\frac{2x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 18x^2 + 23x}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4}$$

Modelový příklad

1. krok modelového příkladu

Máme:

$$\frac{2x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 18x^2 + 23x}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4} =: \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Protože

$$\deg p = 5 \geq 4 = \deg q,$$

vydělíme:

$$\frac{2x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 18x^2 + 23x}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4} = \underbrace{2x - 1}_{r(x)} + \underbrace{\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4}}_{\frac{s(x)}{q(x)}}.$$

Racionální funkce $\frac{s}{q}$ je zbytkem po dělení a splňuje

$$\deg s = 3 < 4 = \deg q.$$

Dál budeme pracovat s ní.

Faktorizace polynomu

Každý polynom q lze v reálném oboru **faktorizovat** do součinu následujících členů:

- **lineární členy** tvaru

$$(x - x_0)^m,$$

kde x_0 je reálný kořen polynomu q a $m \in \mathbb{N}$;

- **kvadratické ireducibilní členy** tvaru

$$(x^2 + \beta x + \gamma)^n,$$

kde $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta^2 < 4\gamma$, $n \in \mathbb{N}$.

Příklad:

$$\begin{aligned} x^{10} + 3x^9 + 5x^8 + 3x^7 - 12x^6 - 42x^5 - 73x^4 - 81x^3 - 59x^2 - 27x - 6 \\ = (x - 2) \cdot (x + 1)^3 \cdot (x^2 + 3) \cdot (x^2 + x + 1)^2. \end{aligned}$$

2. krok modelového příkladu

Nyní pracujeme s funkcí danou předpisem

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4}.$$

Faktorizujeme polynom ve jmenovateli:

$$x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4 = (x - 1)^2(x^2 + 4).$$

(Často to za nás už někdo udělal předem.)

Parciální zlomky

Nechť racionální funkce má tvar

$$\frac{p(x)}{(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_K)^{m_K} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{n_1} \cdots (x^2 + \beta_L x + \gamma_L)^{n_L}},$$

kde

$$x_1, \dots, x_K \in \mathbb{R} \quad (\text{reálné kořeny jmenovatele}),$$

$$\forall j \in \{1, \dots, L\}: \beta_j, \gamma_j \in \mathbb{R} \ \& \ \beta_j^2 < 4\gamma_j$$

a p je polynom stupně menšího než stupeň (faktorizovaného) polynomu ve jmenovateli.

Takovouto funkci lze rozložit do součtu **parciálních zlomků** tvaru

$$\frac{A}{(x - x_i)^k} \quad (\text{pro lineární členy})$$

a tvaru

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^\ell} \quad (\text{pro kvadratické členy}).$$

Musíme ještě říci, jaké mocniny k, ℓ se v součtu objeví.

Každý lineární člen

$$(x - x_i)^k$$

ve jmenovateli racionální funkce přispěje do výsledného součtu parciálních zlomků součtem

$$\frac{A_k}{(x - x_i)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x - x_i)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_2}{(x - x_i)^2} + \frac{A_1}{x - x_i}.$$

Žádný z těchto zlomků nelze vynechat!

Může se ale stát, že ve výsledku vyjdou některá z čísel $A_1, \dots, A_{k-1}$ nulová.

Parciální zlomky

Každý kvadratický ireducibilní člen

$$(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^\ell$$

ve jmenovateli racionální funkce přispěje do výsledného součtu parciálních zlomků součtem

$$\frac{B_\ell x + C_\ell}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^\ell} + \frac{B_{\ell-1} x + C_{\ell-1}}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{\ell-1}} + \cdots + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^2} + \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + \beta_j x + \gamma_j}.$$

Žádný z těchto zlomků nelze vynechat!

Může se ale stát, že ve výsledku vyjdou některá z čísel $A_1, \dots, A_{\ell-1}$ nulová.

Pozor!

Nezapomeňte na „ $Bx + C$ “ v čitateli!

3. krok modelového příkladu

Rozklad na parciální zlomky vypadá takto:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{(x - 1)^2(x^2 + 4)} = \frac{A}{(x - 1)^2} + \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Nyní dostáváme rovnici

$$\begin{aligned} & \frac{p(x)}{(x - x_1)^{m_1} \cdots (x - x_K)^{m_K} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{n_1} \cdots (x^2 + \beta_L x + \gamma_L)^{n_L}} \\ &= \frac{A_{1,m_1}}{(x - x_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{A_{1,1}}{x - x_1} + \cdots + \frac{A_{K,m_K}}{(x - x_K)^{m_K}} + \cdots + \frac{A_{K,1}}{x - x_K} \\ & \quad + \frac{B_{1,n_1}x + C_{1,n_1}}{(x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{n_1}} + \cdots + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{x^2 + \beta_1 x + \gamma_1} + \cdots \\ & \quad + \frac{B_{L,n_L}x + C_{L,n_L}}{(x^2 + \beta_L x + \gamma_L)^{n_L}} + \cdots + \frac{B_{L,1}x + C_{L,1}}{x^2 + \beta_L x + \gamma_L}. \end{aligned}$$

Nalezení koeficientů

Rovnici lze také „krátce“ napsat takto:

$$\frac{p(x)}{\prod_{i=1}^K (x - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^L (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{n_j}} = \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{i,k}}{(x - x_i)^k} + \sum_{j=1}^L \sum_{\ell=1}^{n_j} \frac{B_{j,\ell} x + C_{j,\ell}}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^\ell}.$$

Nalezení koeficientů

Rovnici lze také „krátce“ napsat takto:

$$\frac{p(x)}{\prod_{i=1}^K (x - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^L (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{n_j}} = \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{i,k}}{(x - x_i)^k} + \sum_{j=1}^L \sum_{\ell=1}^{n_j} \frac{B_{j,\ell} x + C_{j,\ell}}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^\ell}.$$

Nyní obě strany **vynásobíme jmenovatelem levé strany**. Dostaneme rovnost

$$p(x) = u(x),$$

kde u je polynom, jehož koeficienty závisejí na číslech $A_{i,k}$, $B_{j,\ell}$, $C_{j,\ell}$.

Nalezení koeficientů

Rovnici lze také „krátce“ napsat takto:

$$\frac{p(x)}{\prod_{i=1}^K (x - x_i)^{m_i} \prod_{j=1}^L (x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^{n_j}} = \sum_{i=1}^K \sum_{k=1}^{m_i} \frac{A_{i,k}}{(x - x_i)^k} + \sum_{j=1}^L \sum_{\ell=1}^{n_j} \frac{B_{j,\ell} x + C_{j,\ell}}{(x^2 + \beta_j x + \gamma_j)^\ell}.$$

Nyní obě strany **vynásobíme jmenovatelem levé strany**. Dostaneme rovnost

$$p(x) = u(x),$$

kde u je polynom, jehož koeficienty závisejí na číslech $A_{i,k}$, $B_{j,\ell}$, $C_{j,\ell}$.

Porovnáním koeficientů u stejných mocnin na obou stranách dostáváme **soustavu lineárních rovnic**. Jejím řešením jsou hledaná čísla $A_{i,k}$, $B_{j,\ell}$, $C_{j,\ell}$.

Modelový příklad

4. krok modelového příkladu

Po roznásobení rovnice

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{(x-1)^2(x^2 + 4)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

dostáváme:

$$x^3 + 3x^2 + 7x + 4 = A(x^2 + 4) + B(x-1)(x^2 + 4) + (Cx + D)(x-1)^2$$

$$1x^3 + 3x^2 + 7x + 4 = (B+C)x^3 + (A-B-2C+D)x^2 + (4B+C-2D)x + 4A-4B+D$$

Tudíž platí **soustava rovnic**:

$$1 = B + C$$

$$3 = A - B - 2C + D$$

$$7 = 4B + C - 2D$$

$$4 = 4A - 4B + D$$

Soustava nalezená tímto způsobem má **vždy jednoznačné řešení** (to lze dokázat).

Pokud nám vyšla soustava, která jednoznačné řešení nemá (např. se špatným počtem proměnných nebo LZ řádky), máme v předchozím výpočtu chybu.

Řešení soustavy lze nalézt metodami lineární algebry.

Je ale vhodné nejdříve **využít triků**.

Nalezení koeficientů: zakrývací pravidlo

Trik: zakrývací pravidlo

Nechť

$$\frac{p(x)}{(x - x_1)^{m_1} (x - x_2)^{m_2} \dots (x - x_K)^{m_K} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{n_1} \dots (x^2 + \beta_L x + \gamma_L)^{n_L}}$$
$$= \frac{A}{(x - x_1)^{m_1}} + \underbrace{\frac{B}{(x - x_1)^{m_1-1}} + \dots + \frac{C}{x - x_1}}_{\text{parciální zlomky se stejným lineárním členem v nižších mocninách}} + \underbrace{\dots}_{\text{ostatní parciální zlomky}}$$

Pak **koeficient A** dostaneme **dosazením bodu x_1** do výrazu na **levé straně**, ve kterém jsme ale **vynechali** člen $(x - x_1)^{m_1}$.

Formálně se jedná o **spočítání limity v bodě x_1** uvedeného výrazu s vynechaným členem.

Nalezení koeficientů: zakrývací pravidlo

Tedy platí toto:

$$A = \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{p(x)}{\underbrace{\phantom{(x-x_1)^{m_1}}}_{\substack{\text{zakrý} \\ \text{člen} \\ (x-x_1)^{m_1}}} (x-x_2)^{m_2} \cdots (x-x_K)^{m_K} (x^2 + \beta_1 x + \gamma_1)^{n_1} \cdots (x^2 + \beta_L x + \gamma_L)^{n_L}}.$$

Zakrývacím pravidlem lze nalézt **pouze** koeficienty u **lineárních členů v nejvyšší mocnině**. Pro ostatní to **nelze** (bez dalšího triku).

Jakmile jsme ale alespoň tyto koeficienty našli, můžeme je použít ke **zjednodušení soustavy**. Existují ale další triky.

Nalezení koeficientů: odečtení zlomku

Trik: odečtení parciálního zlomku

Předpokládejme, že už známe koeficient A ve vztahu

$$\frac{p(x)}{(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\cdots(x-x_K)^{m_K}(x^2+\beta_1x+\gamma_1)^{n_1}\cdots(x^2+\beta_Lx+\gamma_L)^{n_L}} \\ = \frac{A}{(x-x_1)^{m_1}} + \frac{B}{(x-x_1)^{m_1-1}} + \cdots + \frac{C}{x-x_1} + \cdots$$

Nyní lze **odečíst** zlomek

$$\frac{A}{(x-x_1)^{m_1}}$$

od **levé strany**. Z čitatele nové levé strany půjde vytknout $(x-x_1)$ a vykrátit (to lze dokázat). Tím se sníží nejvyšší mocnina u $(x-x_1)$ na obou stranách. Můžeme pak znovu užít zakrývací pravidlo na nalezení B .

Toto má zejména smysl provést, chceme-li najít koeficient(y) **posledního zbývajícího zlomku**. (Ten bude obvykle generován lineárním členem v nižší mocnině nebo kvadratickým členem.)

Průběžné ponaučení:

Za určitých okolností se lze kombinací zakrývacího pravidla, odečtení a tohoto triku **zcela vyhnout řešení soustavy.**

5. krok modelového příkladu

(Použitím triků lze 4. krok zcela vynechat!)

Máme

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

5. krok modelového příkladu

(Použitím triků lze 4. krok zcela vynechat!)

Máme

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Zakrývacím pravidlem dostáváme:

$$A = \left. \frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{x^2 + 4} \right|_{x=1} = 3.$$

5. krok modelového příkladu

(Použitím triků lze 4. krok zcela vynechat!)

Máme

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Zakrývacím pravidlem dostáváme:

$$A = \left. \frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{x^2 + 4} \right|_{x=1} = 3.$$

Odečteme získaný zlomek od levé strany:

$$\frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{(x-1)^2(x^2+4)} - \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{x^3 + 7x - 8}{(x-1)^2(x^2+4)} = \frac{x^2 + x + 8}{(x-1)(x^2+4)}.$$

5. krok modelového příkladu

Nyní máme

$$\frac{x^2 + x + 8}{(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

5. krok modelového příkladu

Nyní máme

$$\frac{x^2 + x + 8}{(x - 1)(x^2 + 4)} = \frac{B}{x - 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}.$$

Zakrývací pravidlo podruhé:

$$B = \left. \frac{x^2 + x + 8}{x^2 + 4} \right|_{x=1} = 2.$$

Modelový příklad

5. krok modelového příkladu

Nyní máme

$$\frac{x^2 + x + 8}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Zakrývací pravidlo podruhé:

$$B = \left. \frac{x^2 + x + 8}{x^2 + 4} \right|_{x=1} = 2.$$

Opět odečteme získaný zlomek od levé strany:

$$\frac{x^2 + x + 8}{(x-1)(x^2+4)} - \frac{2}{x-1} = \frac{-x}{x^2+4}.$$

Tím jsme už dostali poslední zbývající parciální zlomek ($C = -1$, $D = 0$).

Mezivýsledek modelového příkladu po 5. kroku:

Našli jsme rozklad původní racionální funkce na polynom a parciální zlomky:

$$\begin{aligned} & \frac{2x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 18x^2 + 23x}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4} \\ &= 2x - 1 + \frac{x^3 + 3x^2 + 7x + 4}{(x - 1)^2(x^2 + 4)} \\ &= 2x - 1 + \frac{3}{(x - 1)^2} + \frac{2}{x - 1} - \frac{x}{x^2 + 4}. \end{aligned}$$

Nyní zbývá najít primitivní funkce k funkcím na posledním řádku.

Integrace parciálních zlomků

Primitivní funkce parciálních zlomků generovaných **lineárními** členy najdeme snadno:

$$\int \frac{dx}{(x - x_0)^n} = \begin{cases} \ln |x - x_0|, & n = 1; \\ \frac{1}{(1 - n)(x - x_0)^{n-1}}, & n > 1, \end{cases}$$

jedná se o PF na $(-\infty, x_0)$ nebo (x_0, ∞) .

Integrace parciálních zlomků

Dále hledáme primitivní funkci parciálního zlomku generovaného **kvadratickým** ireducibilním členem, tedy

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n} dx,$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta^2 < 4\gamma$, $B, C \in \mathbb{R}$.

Pokud $B \neq 0$, půjčíme si a vrátíme konstantu, abychom do čitatele dostali násobek derivace jmenovatele:

$$\int \frac{Bx + C}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n} dx = \int \frac{\frac{B}{2}(2x + \beta)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n} dx + \int \frac{C - \frac{B\beta}{2}}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n} dx.$$

V prvním zlomku použijeme substituci za jmenovatele:

$$\int \frac{\frac{B}{2}(2x + \beta)}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n} dx = \left| \begin{array}{l} 2x^2 + \beta x + \gamma = y \\ (2x + \beta) dx = dy \end{array} \right| = \frac{B}{2} \int \frac{dy}{y^n}$$

a **toto** už umíme vyřešit. Zbývá **toto**.

Zbývá najít primitivní funkce typu

$$\int \frac{dx}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n},$$

kde $n \in \mathbb{N}$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta^2 < 4\gamma$.

Integrace parciálních zlomků

Upravíme zlomek takto:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 + \beta x + \gamma)^n} &= \int \frac{dx}{\left(\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + \gamma - \frac{\beta^2}{4}\right)^n} \\&= \frac{4}{4c - b^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}\left(x + \frac{\beta}{2}\right)^2 + 1\right)^n} \\&= \left| \begin{array}{l} \frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}}\left(x + \frac{\beta}{2}\right) = y \\ \frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} dx = dy \end{array} \right| \\&= \frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^n}\end{aligned}$$

Integrace parciálních zlomků

Pokud $n = 1$, dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{4}{4\gamma - \beta^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \left(x + \frac{\beta}{2}x \right)^2 + 1 \right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \int \frac{dy}{y^2 + 1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \operatorname{arctg} y + c \\ &= \frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma - \beta^2}} \left(x + \frac{\beta}{2} \right) \right) + c, \quad \text{PF na } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Integrace parciálních zlomků

Pokud $n > 1$, potřebujeme najít primitivní funkci

$$I_n(y) := \int \frac{dy}{(y^2 + 1)^n}.$$

Trik: „redukční formule“

Integrací per-partes se ukáže rekurentní formule:

$$I_n(y) = \frac{y}{2(n-1)(y^2+1)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\};$$

$$I_1(y) = \operatorname{arctg} y + c.$$

Tímto způsobem lze tedy postupně redukovat mocninu n , až se dojde k případu $n = 1$, který umíme vyřešit.

Integrace parciálních zlomků

Ukážeme příklad – ten nesouvisí s modelovým příkladem, ale ukazuje, co si počít s kvadratickým členem.

Příklad.

Najděme

$$\int \frac{x+2}{x^2+2x+3} dx, \quad \int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2} dx.$$

6. krok modelového příkladu

Hledáme:

$$\int \left(2x - 1 + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-1} - \frac{x}{x^2+4} \right) dx.$$

Zintegrujeme zvlášť polynom i jednotlivé parciální zlomky.

Modelový příklad

6. krok modelového příkladu

Dílčí primitivní funkce vypadají takto:

$$\int (2x - 1) dx = x^2 - x + c, \quad \text{PF na } \mathbb{R};$$

$$\int \frac{3}{(x-1)^2} dx = -\frac{3}{x-1} + c, \quad \text{PF na } (-\infty, 1) \text{ nebo } (1, \infty);$$

$$\int \frac{2}{x-1} dx = 2 \ln |x-1| + c, \quad \text{PF na } (-\infty, 1) \text{ nebo } (1, \infty);$$

$$\int \frac{-x}{x^2 + 4} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + c, \quad \text{PF na } \mathbb{R}.$$

Pozorování.

Příklad byl volen tak, že integrace kvadratického členu je velmi snadná. V obecném případě může být složitější.

Modelový příklad

Výsledná funkce je primitivní k původní racionální funkci na maximálním intervalu takovém, že každá získaná dílčí funkce je na něm primitivní k odpovídajícímu parciálnímu zlomku.

Výsledek modelového příkladu:

$$\int \frac{2x^5 - 5x^4 + 13x^3 - 18x^2 + 23x}{x^4 - 2x^3 + 5x^2 - 8x + 4} dx$$
$$= x^2 + x - \frac{3}{x-1} + 2 \ln |x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + c,$$

PF na $(-\infty, 1)$ nebo $(1, \infty)$.

Shrnutí integrace racionálních funkcí

Pozitivní aspekty:

- Každou racionální funkci lze teoreticky touto technikou zintegrovat.
- Použitý algoritmus vede k výsledku v konečném počtu kroků.
- Jako vždy při hledání primitivní funkce lze na konci provést zkoušku zpětným zderivováním.

Shrnutí integrace racionálních funkcí

Pozitivní aspekty:

- Každou racionální funkci lze teoreticky touto technikou zintegrovat.
- Použitý algoritmus vede k výsledku v konečném počtu kroků.
- Jako vždy při hledání primitivní funkce lze na konci provést zkoušku zpětným zderivováním.

Negativní aspekty:

- U obecné racionální funkce budeme mít velmi brzy problém s nalezením kořenů jmenovatele. Od určitého stupně je to ve většině případů analyticky nemožné.
- S rostoucím počtem byť známých kořenů složitost výpočtu rychle roste. Obtížnější je zejména práce s ireducibilními kvadratickými členy.

Co uvidíte za rok:

Mocnější arzenál triků pro tento typ integrace nabízí komplexní analýza.

Neurčitý integrál

Inverzní substituce

Inverzní substituce v integrálu

Věta 7.13 (substituce 2. druhu v neurčitém integrálu)

Nechť $I, J \subset \mathbb{R}$ jsou otevřené intervaly. Nechť $\varphi: I \rightarrow J$ je monotonní diferencovatelná funkce taková, že $\varphi(I) = J$ a pro všechna $t \in I$ platí $\varphi'(t) \neq 0$. Nechť $f: J \rightarrow \mathbb{R}$ má na J primitivní funkci. Nechť $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ je pro $t \in I$ dána předpisem

$$g(t) := f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

a má na intervalu I primitivní funkci G . Potom platí

$$\int f(x) dx = G(\varphi^{-1}(x)) + C, \quad x \in J.$$

- V této substituci nahrazujeme proměnnou x funkcí nové proměnné t :

$$x = \varphi(t),$$

$$dx = \varphi'(t) dt.$$

- **Musíme** hlídat **ryzí monotonii** funkce φ .
- Pokud nenajdeme vhodnou φ , aby $\varphi(I) = J$, lze často najít primitivní funkce na dílčích intervalech a „nalepit“ je (viz V 7.10).

Substituce za exponenciálu

Substituce za exponenciálu:

Nechť R je racionální funkce a $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Integrál

$$\int R(e^{ax}) dx$$

lze spočítat substitucí

$$e^{ax} = t$$

$$x = \frac{\ln t}{a}$$

$$dx = \frac{1}{at} dt.$$

Funkce $x \mapsto e^{ax}$ je prostá na $\mathbb{R}$, primitivní funkci dostáváme na intervalech spojitosti funkce $x \mapsto R(e^{ax})$, které jsou určeny nulovými body jmenovatele.

Tento typ příkladu lze také obvykle řešit vytknutím členu e^{ax} v čitateli a substitucí 1. druhu (vytknutý člen je „viděná derivace“ až na multiplikativní konstantu a). Vede to na stejný výpočet.

Příklad.

Určeme

$$\int \frac{e^{6x} - e^{3x} + 1}{e^{6x} - 1} dx.$$

Definice 7.14 (polynom dvou proměnných)

Nechť $n \in \mathbb{N}$ a $a_{ij} \in \mathbb{R}$ pro všechna $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Funkci

$$p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x^i y^j$$

nazveme **polynomem dvou proměnných**.

Tuto definici lze analogicky rozšířit i pro více proměnných.

Definice 7.15 (racionální funkce dvou proměnných)

Nechť p, q jsou polynomy dvou proměnných. Označme

$$K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x, y) = 0\}.$$

Pak funkci

$$R: \mathbb{R}^2 \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \mapsto \frac{p(x, y)}{q(x, y)}$$

nazveme **racionální funkcí dvou proměnných**.

Tuto definici lze analogicky rozšířit i pro více proměnných.

Příklad.

Předpis

$$R(x, y) := \frac{x^2y + xy + xy^3 + y + 2}{x^2 - 2xy + y^2 - 1}$$

dává racionální funkci definovanou na množině

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2xy + y^2 - 1 \neq 0\}.$$

Substituce za tangens polovičního argumentu:

Nechť R je racionální funkce dvou proměnných. Integrál

$$\int R(\cos x, \sin x) dx$$

lze převést substitucí

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

na integrál obyčejné racionální funkce jedné proměnné.

Je k tomu potřeba toto (viz tabuli):

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}.$$

Substituce za tangens polovičního argumentu:

Funkce $x \mapsto \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ je prostá **pouze na** $(-\pi, \pi)$. Použít tuto substituci tedy lze **pouze** na tomto intervalu. Původní integrand ale může být definován na větší množině (často na $\mathbb{R}$). V takovém případě je obvykle omezení na $(-\pi, \pi)$ „**umělé**“ a lze jej odstranit pomocí **lepení** (viz V 7.10).

Je-li původní funkce definovaná na $(0, 2\pi)$, lze volit substituci

$$\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = t$$

$$x = 2 \operatorname{arccotg} t$$

$$dx = -\frac{2}{1+t^2} dt,$$

a lepení se tak vyhnout (výsledek bude beztak primitivní pouze na $(0, 2\pi)$).

Příklad.

Najděme neurčitý integrál na maximálním otevřeném intervalu:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos x}.$$

Pozorování.

Úloha je zadána tak, aby lepení nebylo potřeba. Primitivní funkci nemůžeme dostat na větším intervalu než $((2k - 1)\pi, (2k + 1)\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$.

V praktických výpočtech nás zpravidla zajímá **určitý integrál**. Pro jeho stanovení lepení primitivní funkce nepotřebujeme.

U příkladů typu

$$\int R(\cos x, \sin x) dx$$

funguje substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, resp. $\operatorname{cotg} \frac{x}{2} = t$ **vždy**.

Je ale **radno se jí vyhnout**, pokud to lze. Dá se tak učinit, pokud má R ještě jisté dodatečné vlastnosti.

Substituce za tangens:

Platí-li

$$R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$$

pro všechna x z definičního oboru funkce $x \mapsto R(\cos x, \sin x)$, pak lze použít substituci

$$\operatorname{tg} x = t$$

$$x = \operatorname{arctg} t$$

$$dx = \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Opět je nutno vyjádřit $\sin x$, $\cos x$ jako funkce proměnné t (viz tabuli, skriptu [T]).

Substituci je možné použít na intervalu $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Alternativou je substituce $\operatorname{cotg} x = t$ na intervalu $(0, \pi)$.

Příklad.

Najděme neurčitý integrál na maximálním otevřeném intervalu:

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$$

Substituce za sinus/kosinus:

Platí-li

$$R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x),$$

resp.

$$R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$$

pro všechna x z definičního oboru funkce $x \mapsto R(\cos x, \sin x)$, pak lze použít substituci

$$\sin x = t, \quad \text{resp.} \quad \cos x = t.$$

Konkrétně lze funkci zpravidla upravit na typ „vidím derivaci“ použitím identity

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

a vyřešit pomocí substituce 1. druhu.

Intervaly řešení závisí na původní funkci $x \mapsto R(\cos x, \sin x)$, lepení není třeba (ani by nemělo být možné).

Příklad.

Najděme neurčitý integrál na maximálním otevřeném intervalu:

$$\int \frac{\sin^3 x}{1 + \cos^2 x} dx.$$

Integrály s odmocninami

Substituce za odmocninu lomené funkce:

Integrály typu

$$\int R \left(x, \sqrt[n]{\frac{ax-b}{cx-\delta}} \right) dx, \quad (29)$$

kde R je racionální funkce dvou proměnných, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a, b, c, \delta \in \mathbb{R}$, $a\delta \neq bc$, lze řešit substitucí

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{\frac{ax-b}{cx-\delta}} &= t \\ x &= \frac{\delta t^n - b}{a - ct^n} \\ dx &= \left(\frac{\delta t^n - b}{a - ct^n} \right)' dt. \end{aligned}$$

Intervaly řešení závisejí na definičním oboru integrandu v (29).

Příklad.

Najděme neurčitý integrál na maximálním otevřeném intervalu:

$$\int \frac{1}{1 + \sqrt{x-1}} dx.$$

Substituce za odmocninu rozdílu nebo součtu kvadrátů:

Nechť R je racionální funkce dvou proměnných, $a > 0$. V následujících integrálech lze použít uvedené substituce:

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx : \quad \text{substituce} \quad x = a \cos t, \quad x = a \sin t,$$

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx : \quad \text{substituce} \quad x = a \cosh t,$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx : \quad \text{substituce} \quad x = a \sinh t.$$

Často bude třeba použít různých goniometrických nebo hyperbolometrických identit.

Je vždy **nutné hlídat monotonii** substituované funkce!

Možné jsou zde i další substituce, viz skriptá [T].

Příklad.

Určeme

$$\int \sqrt{9 - x^2} \, dx, \quad \int \frac{1}{\sqrt{4 + x^2}} \, dx.$$

Určitý integrál

Riemannův integrál

Motivace zavedení určitého integrálu:

- Geometrický význam: stanovení plochy mezi grafem nezáporné funkce a osou x .
- Plochu lze intuitivně aproximovat pomocí obdélníků. Lze to libovolně přesně?
- Fyzikální význam: dráha uražená v čase při proměnlivé rychlosti, obecně hodnota veličiny v čase v závislosti na jejím proměnlivém přírůstku.
- Jaká je vazba na **derivování**, resp. **neurčitý integrál**?

Klíčová definice 8.1 (dělení intervalu)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Pak **dělením intervalu** $[a, b]$ rozumíme libovolnou konečnou podmnožinu $D \subset [a, b]$ obsahující oba body $[a, b]$.

- Uvažujeme pouze **omezený** a uzavřený interval a **konečné dělení**.
- Každé dělení D takového intervalu lze **očíslovat** takto:

$$D = \{x_j\}_{j=0}^n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Počet prvků takového dělení D je tedy $n + 1$.

Definice 8.2 (zjemnění dělení)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a D_1, D_2 jsou dvě dělení intervalu $[a, b]$. Řekneme, že D_2 **zjemňuje** D_1 , pokud platí

$$D_1 \subset D_2.$$

- Zjemnění dosáhneme **přidáním dalších bodů** do původního dělení.
- **Ne každá** dvě dělení lze tímto způsobem porovnat (tak, že by jedno zjemňovalo druhé).

Klíčová definice 8.3 (integrální součty)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a $D = \{x_0, \dots, x_n\}$ je dělení intervalu $[a, b]$ takové, že $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$. Nechť funkce f je omezená na intervalu $[a, b]$. Potom definujeme **horní integrální součet** funkce f vzhledem k dělení D jako

$$\overline{S}(f, D) := \sum_{j=1}^n \sup \{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1})$$

a **dolní integrální součet** funkce f vzhledem k dělení D jako

$$\underline{S}(f, D) := \sum_{j=1}^n \inf \{f(x) \mid x \in [x_{j-1}, x_j]\} \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Pro pochopení smyslu těchto veličin je třeba nakreslit obrázek. Definice má ale geometrický smysl pro jakoukoli **omezenou** funkci, tedy speciálně i pro nespojitou nebo měnící znaménko.

Očividně platí následující:

Tvrzení 8.4 (nerovnost mezi horním a dolním integrálním součtem)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a D je dělení intervalu $[a, b]$. Nechť funkce f je omezená na intervalu $[a, b]$. Potom platí

$$\underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D).$$

Tvrzení 8.5 (vztah jemnosti a integrálních součtů)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a nechť funkce f je omezená na $[a, b]$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalu $[a, b]$ taková, že $D_1 \subset D_2$. Potom platí

$$\overline{S}(f, D_1) \geq \overline{S}(f, D_2),$$

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \underline{S}(f, D_2).$$

Lze tedy říci, že zjemnění dělení „zpřesňuje“ horní i dolní součty.

Věta 8.6 (odhady integrálních součtů)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$, $m, M \in \mathbb{R}$. Nechť funkce f definovaná na $[a, b]$ splňuje

$$\forall x \in [a, b]: m \leq f(x) \leq M. \quad (30)$$

Pak pro libovolná dělení D_1, D_2 intervalu $[a, b]$ platí

$$m(b-a) \leq \underline{S}(f, D_1) \leq \bar{S}(f, D_2) \leq M(b-a). \quad (31)$$

- Podmínka (30) říká, že funkce f je **omezená na $[a, b]$** . Navíc říká, jakými je funkce omezena konstantami.
- První informace v (31): dolní součet je **menší nebo roven** hornímu součtu též funkce, a to i přes **jiné dělení**. Je to **silnější** výrok než Tvzení 8.4.
- Druhá informace v (31): dolní i horní součet lze vždy odhadnout pomocí **délky intervalu** a **konstant omezenosti** funkce.

Klíčová definice 8.7 (Riemannův integrál)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a $\mathcal{D}$ značí množinu všech dělení intervalu $[a, b]$. Nechť funkce f je omezená na intervalu $[a, b]$ a nechť platí

$$\sup \{ \underline{S}(f, D) \mid D \in \mathcal{D} \} = \inf \{ \bar{S}(f, D) \mid D \in \mathcal{D} \}. \quad (32)$$

Potom řekneme, že funkce f je na intervalu $[a, b]$ **riemannovsky integrovatelná** a hodnotu

$$(R) \int_a^b f(x) \, dx := \sup \{ \underline{S}(f, D) \mid D \in \mathcal{D} \} = \inf \{ \bar{S}(f, D) \mid D \in \mathcal{D} \}$$

nazveme **Riemannovým integrálem funkce f přes interval $[a, b]$** .

Poznámky k definici Riemannova integrálu (Def. 8.7):

- Požadavek **omezenosti** jak intervalu, tak funkce, je důležitý. Později definici ale ještě zobecníme.

Poznámky k definici Riemannova integrálu (Def. 8.7):

- Požadavek **omezenosti** jak intervalu, tak funkce, je důležitý. Později definici ale ještě zobecníme.
- Tomuto typu integrálu říkáme také **určitý integrál**. Riemannův přístup není jediný, uvidíme také **Newtonův integrál**.

Poznámky k definici Riemannova integrálu (Def. 8.7):

- Požadavek **omezenosti** jak intervalu, tak funkce, je důležitý. Později definici ale ještě zobecníme.
- Tomuto typu integrálu říkáme také **určitý integrál**. Riemannův přístup není jediný, uvidíme také **Newtonův integrál**.
- Značku (R) v integrálu obvykle vynecháváme. Nechceme-li zdůraznit, že integrál chápeme jako Riemannův, píšeme jen

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

Poznámky k definici Riemannova integrálu (Def. 8.7):

- Požadavek **omezenosti** jak intervalu, tak funkce, je důležitý. Později definici ale ještě zobecníme.
- Tomuto typu integrálu říkáme také **určitý integrál**. Riemannův přístup není jediný, uvidíme také **Newtonův integrál**.
- Značku (R) v integrálu obvykle vynecháváme. Nechceme-li zdůraznit, že integrál chápeme jako Riemannův, píšeme jen

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

- Výroky „ f je na $[a, b]$ riemannovsky integrovatelná“ a „existuje Riemannův integrál $(R) \int_a^b f(x) \, dx$ “ znamenají totéž. Totiž že platí (32).

Riemannův integrál

Poznámky k definici Riemannova integrálu (Def. 8.7):

- Požadavek **omezenosti** jak intervalu, tak funkce, je důležitý. Později definici ale ještě zobecníme.
- Tomuto typu integrálu říkáme také **určitý integrál**. Riemannův přístup není jediný, uvidíme také **Newtonův integrál**.
- Značku (R) v integrálu obvykle vynecháváme. Nechceme-li zdůraznit, že integrál chápeme jako Riemannův, píšeme jen

$$\int_a^b f(x) \, dx.$$

- Výroky „ f je na $[a, b]$ riemannovsky integrovatelná“ a „existuje Riemannův integrál $(R) \int_a^b f(x) \, dx$ “ znamenají totéž. Totiž že platí (32).
- Ne každá** omezená funkce na $[a, b]$ je riemannovsky integrovatelná, horní a dolní součty v (32) **nemusí souhlasit**. V takovém případě nepřekvapivě říkáme, že Riemannův integrál (funkce f přes $[a, b]$) **neexistuje**.

Odhady Riemannova integrálu

Věta 8.6 a Definice 8.7 mají tento důležitý důsledek:

Důsledek 8.8 (odhady Riemannova integrálu)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$, $m, M \in \mathbb{R}$. Nechť je funkce f riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a dále splňuje

$$\forall x \in [a, b]: m \leq f(x) \leq M.$$

Potom platí

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a).$$

Pozorování.

Riemannův integrál z **omezené** funkce přes **omezený** interval je **konečný**.

Věta 8.9 (Riemannův integrál jako limita)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a funkce f je omezená na intervalu $[a, b]$. Pak je ekvivalentní:

- (i) Funkce f je riemannovsky integrovatelná.*
- (ii) Existuje posloupnost $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dělení intervalu $[a, b]$ taková, že platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{S}(f, D_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{S}(f, D_n).$$

- (iii) Existuje posloupnost $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dělení intervalu $[a, b]$ taková, že platí*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n)) = 0.$$

Příklad.

Pomocí Věty 8.9 můžeme spočítat tyto Riemannovy integrály:

$$(R) \int_0^1 x \, dx, \quad (R) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \, dx.$$

Přímý výpočet Riemannova integrálu

Příklad.

Pomocí Věty 8.9 můžeme spočítat tyto Riemannovy integrály:

$$(R) \int_0^1 x \, dx, \quad (R) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \, dx.$$

Pozorování.

Toto rozhodně není praktický způsob, jak to dělat. Místo něj brzy ukážeme jiný.

Otázka:

Pro jaké funkce existuje Riemannův integrál?

Nutná podmínka existence je omezenost, postačující podmínka to ale není, viz Dirichletovu funkci.

Otázka:

Pro jaké funkce existuje Riemannův integrál?

Nutná podmínka existence je omezenost, postačující podmínka to ale není, viz Dirichletovu funkci.

Ukážeme: riemannovsky integrovatelné jsou například **monotonní** nebo **spojité funkce**.

Věta 8.10 (riemannovská integrovateľnosť monotónnych funkcií)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a funkce f je omezená a monotónní na intervalu $[a, b]$. Pak je tato funkce na $[a, b]$ riemannovsky integrovateľná.

Věta 8.11 (riemannovská integrovateľnosť spojitých funkcií)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Pak je tato funkce na $[a, b]$ riemannovsky integrovateľná.

Klíčová věta 8.12 (vlastnosti Riemannova integrálu)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$, $c \in \mathbb{R}$. Nechť funkce f, g jsou riemannovsky integrovatelné na $[a, b]$. Pak platí následující tvrzení.

(i) Funkce $f + g$ je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

(ii) Funkce cf je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\int_a^b cf(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx.$$

(iii) Pokud pro všechna $x \in [a, b]$ platí $f(x) \leq g(x)$, pak platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

(iv) Funkce $|f|$ je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a platí

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx.$$

Klíčová věta 8.13 (aditivita Riemannova integrálu vůči intervalům)

Nechť $-\infty < a < b < c < \infty$. Nechť funkce f je omezená na $[a, c]$. Pak je funkce f Riemannovsky integrovatelná na $[a, c]$ právě tehdy, když je Riemannovsky integrovatelná jak na $[a, b]$, tak na $[b, c]$. V takovém případě platí

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx.$$

Kolik bodů vidí Riemann?

Tvrzení 8.14 (nezávislost Riemannova integrálu na konečně mnoha funkčních hodnotách)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Nechť funkce f, g jsou omezené na intervalu $[a, b]$ a liší se tam nejvýše v konečně mnoha bodech. Jinak řečeno, nechť

$$\text{card}(\{x \in [a, b] \mid f(x) \neq g(x)\}) < \infty.$$

Potom je funkce f riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ právě tehdy, když je tamtéž riemannovsky integrovatelná funkce g . V takovém případě navíc platí

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b g(x) \, dx.$$

Slogan:

„Změníme-li hodnotu funkce v konečně mnoha bodech, její Riemannův integrál se nezmění.“

Definice 8.15 (po částech spojitá funkce)

Nechť funkce f je definovaná na intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Řekneme, že funkce f je na $[a, b]$ **po částech spojitá**, existuje-li dělení $(x_j)_{j=0}^n$ intervalu $[a, b]$ takové, že pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí:

- (i) funkce f je spojitá na (x_{j-1}, x_j) ,
 - (ii) funkce f má vlastní limitu zprava v x_{j-1} a vlastní limitu zleva v x_j .
- V bodech nespojitosti může být funkce definovaná jakkoli. V každé dvojici bodů x_{j-1}, x_j ji lze zvlášť spojitě předefinovat tak, aby byla spojitá na celém dílčím intervalu $[x_{j-1}, x_j]$, a to díky (ii).
 - Odtud už plyne, že funkce po částech spojitá na $[a, b]$ je tamtéž **omezená**.

Integrovatelnost po částech spojitých funkcí

Důsledkem Věty 8.13 a Tvrzení 8.14 je tato věta:

Věta 8.16 (riemannovská integrovatelnost po částech spojitých funkcí)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Nechť funkce f je omezená a po částech spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom je f na $[a, b]$ riemannovsky integrovatelná.

Pozorování.

Většina funkcí, se kterými se na základní úrovni setkáte, je po částech spojitá na vhodných intervalech, existuje tam tedy jejich Riemannův integrál.

Pozor ale na **neomezené** funkce! U nich se musí postupovat opatrněji (uvidíme).

Je smysluplné zavést následující **značení**:

Definice 8.17 (Riemannův integrál při převrácených mezích)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$ a funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Pak definujeme:

$$(R) \int_b^a f(x) \, dx := - (R) \int_a^b f(x) \, dx,$$

$$(R) \int_a^a f(x) \, dx := 0.$$

Nyní tedy lze psát (viz V 8.13):

$$\int_a^c f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^c f(x) \, dx$$

pro **jakákoli** $a, b, c \in \mathbb{R}$ taková, že příslušné Riemannovy integrály jsou definovány. (Netřeba tedy $a < b < c$.) Toto se hodí v praktických výpočtech.

Otázky:

- Jak prakticky spočítat určitý integrál?
- Jak souvisejí určitý a neurčitý integrál?

Odpověď nabízí následující zásadní věta.

Klíčová věta 8.18 (základní věta kalkulu)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$, $c \in (a, b)$. Nechť funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[a, b]$. Pro každé $x \in [a, b]$ definujeme

$$F(x) := (R) \int_c^x f(y) dy.$$

Potom platí následující.

- (i) Funkce F je spojitá na $[a, b]$.
- (ii) Je-li funkce f spojitá v bodě $x \in (a, b)$, pak je funkce F v tomtéž bodě diferencovatelná a platí $F'(x) = f(x)$.

Zde je nutné chápat rozdíl mezi výroky

$$„F'(x) = f(x)“ \quad \text{a} \quad „F' = f“.$$

Vě větě je první z nich, platí jen **v uvedených bodech x** .

Důsledkem základní věty kalkulu a Věty 8.11 je Věta 7.8.

Je-li f **spojitá** funkce na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a zvolíme-li libovolné $c \in I$, potom funkce

$$F: I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \int_c^x f(y) \, dy$$

je **primitivní** k funkci f na I .

Základní věta kalkulu

Nechť je f **spojitá** na otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ a $c \in I$.

Jelikož libovolné dvě primitivní funkce $k f$ na I se liší pouze o konstantu, **každá** taková primitivní funkce F má pro $x \in I$ tvar

$$F(x) = F(c) + \int_c^x f(y) dy.$$

Volbou hodnoty $F(c)$ ovlivňujeme **integrační konstantu** („ $+C$ “).

Pozor!

Bez spojitosti f toto nemusí fungovat!

Příklad.

Uvažujme funkci danou na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

Ukážeme, že funkce

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^x f(y) \, dy$$

není primitivní k f na $\mathbb{R}$.

Příklad.

Uvažujme funkci danou na $\mathbb{R}$ předpisem

$$f(x) = \operatorname{sgn} x.$$

Ukážeme, že funkce

$$G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^x f(y) \, dy$$

není primitivní k f na $\mathbb{R}$.

Je k ní ale primitivní na jakémkoli otevřeném intervalu **neobsahujícím 0**.

Díky Větě 8.18 umíme (někdy) vyjádřit **neurčitý** integrál pomocí **určitého**.

Zajímá nás to ale hlavně **naopak**.

Určitý integrál

Výpočet určitého integrálu

Klíčová věta 8.19 (Newton–Leibniz)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Nechť funkce f je riemannovsky integrovatelná na $[a, b]$ a zároveň na (a, b) existuje její primitivní funkce F . Potom existují vlastní jednostranné limity

$$F(a_+) := \lim_{x \rightarrow a_+} F(x), \quad F(b_-) := \lim_{x \rightarrow b_-} F(x)$$

a platí

$$(R) \int_a^b f(x) \, dx = F(b_-) - F(a_+).$$

Důkaz této věty v uvedené obecnosti najdete ve skriptech [T].

Pomocí této věty lze dokázat Větu 7.10 o lepení primitivních funkcí.

Definice 8.20 (Newtonův integrál)

Nechť $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Nechť funkce f má na (a, b) primitivní funkci F . Pak definujeme **Newtonův integrál** funkce f přes interval (a, b) jako

$$(N) \int_a^b f(x) dx = \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x), \quad (33)$$

pokud je výraz na pravé straně definován. Je-li tento výraz navíc konečný, řekneme, že je funkce f **newtonovsky integrovatelná** na (a, b) .

Pozor! Aby Newtonův integrál existoval, **musí** platit **všechno** toto:

- Existuje primitivní funkce k f **na celém** (a, b) . Selže-li toto být **v jediném bodě**, Newtonův integrál pak **neexistuje**.
- Existují jednostranné limity této primitivní funkce na pravé straně (33).
- Výraz na pravé straně (33) je definovaný.

Srovnání Riemannova a Newtonova integrálu

- Riemann vyžaduje **omezený interval** $[a, b]$ a **omezenou funkci** f . Riemannův integrál je automaticky konečný.

Srovnání Riemannova a Newtonova integrálu

- Riemann vyžaduje **omezený interval** $[a, b]$ a **omezenou funkci** f . Riemannův integrál je automaticky konečný.
- Newton vyžaduje **existenci primitivní funkce** $k f$ na (a, b) a **existenci jednostranných limit primitivní funkce** v krajních bodech, ale **nevyžaduje omezenost**. Newtonův integrál může být nekonečný.

Srovnání Riemannova a Newtonova integrálu

- Riemann vyžaduje **omezený interval** $[a, b]$ a **omezenou funkci** f . Riemannův integrál je automaticky konečný.
- Newton vyžaduje **existenci primitivní funkce** $k f$ na (a, b) a **existenci jednostranných limit primitivní funkce** v krajních bodech, ale **nevyžaduje omezenost**. Newtonův integrál může být nekonečný.
- Termín „integrovatelná funkce“ vždy značí, že příslušný integrál **existuje a je konečný**. U Newtona **rozlišujeme** mezi „integrovatelná“ a „její integrál existuje/je definován/má smysl“.

Srovnání Riemannova a Newtonova integrálu

- Riemann vyžaduje **omezený interval** $[a, b]$ a **omezenou funkci** f . Riemannův integrál je automaticky konečný.
- Newton vyžaduje **existenci primitivní funkce** $k f$ na (a, b) a **existenci jednostranných limit primitivní funkce** v krajních bodech, ale **nevyžaduje omezenost**. Newtonův integrál může být nekonečný.
- Termín „integrovatelná funkce“ vždy značí, že příslušný integrál **existuje a je konečný**. U Newtona **rozlišujeme** mezi „integrovatelná“ a „její integrál existuje/je definován/má smysl“.
- Integrál (oba druhy) přes $[a, b]$ a (a, b) považujeme za **totéž**.

Srovnání Riemannova a Newtonova integrálu

- Riemann vyžaduje **omezený interval** $[a, b]$ a **omezenou funkci** f . Riemannův integrál je automaticky konečný.
- Newton vyžaduje **existenci primitivní funkce** $k f$ na (a, b) a **existenci jednostranných limit primitivní funkce** v krajních bodech, ale **nevyžaduje omezenost**. Newtonův integrál může být nekonečný.
- Termín „integrovatelná funkce“ vždy značí, že příslušný integrál **existuje a je konečný**. U Newtona **rozlišujeme** mezi „integrovatelná“ a „její integrál existuje/je definován/má smysl“.
- Integrál (oba druhy) přes $[a, b]$ a (a, b) považujeme za **totéž**.
- Je-li funkce na $[a, b]$ (nebo (a, b)) jak riemannovsky, tak newtonovsky integrovatelná, jsou **hodnoty obou integrálů stejné**:

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (N) \int_a^b f(x) dx.$$

- Předchozí bod nastává např. pro **spojité funkce na omezeném uzavřeném intervalu**.

Srovnání Riemannova a Newtonova integrálu

Příklady na rozdílnost integrálů:

Existuje $(R) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \, dx = 0,$

ale

neexistuje $(N) \int_{-1}^1 \operatorname{sgn} x \, dx$

(integrand nemá na $(-1, 1)$ primitivní funkci).

Srovnání Riemannova a Newtonova integrálu

Příklady na rozdílnost integrálů:

Neexistuje $(R) \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx$

(integrand není omezená funkce), ale

existuje $(N) \int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2.$

Neexistuje $(R) \int_1^{\infty} x^{-2} dx$

(interval $(0, \infty)$ není omezený), ale

existuje $(N) \int_1^{\infty} x^{-2} dx = 1.$

Nevlastními integrály jako těmi posledních dvou bodech se budeme zabývat později.

Značení v určitém integrálu

Nechť funkce F je definovaná na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ (i neomezeném) a existují jednostranné limity

$$\lim_{x \rightarrow a+} F(x), \quad \lim_{x \rightarrow b-} F(x).$$

Používáme **značení**:

$$[F(x)]_a^b := \lim_{x \rightarrow b-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a+} F(x), \quad (34)$$

je-li na pravé straně definovaný výraz. Dále značíme:

$$[F(x)]_b^a := -[F(x)]_a^b, \quad [F(x)]_a^a := 0.$$

Číslům a , resp. b , říkáme v kontextu (34) **dolní**, resp. **horní mez**.

Značení v určitém integrálu

Nechť funkce f je spojitá na omezeném uzavřeném intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Její určitý integrál budeme počítat pomocí Newtonovy–Leibnizovy formule. Je-li F primitivní k f na (a, b) , dostáváme

$$(R) \int_a^b f(x) \, dx = (N) \int_a^b f(x) \, dx = [F(x)]_a^b. \quad (35)$$

Co jsme použili:

- Primitivní funkce na (a, b) existuje (V 7.8).
- Riemannův integrál v (35) existuje (V 8.11).
- Newtonův integrál v (35) existuje, rovná se Riemannovu a výraz vpravo v (35) je definovaný a konečný (V 8.19).

Příklad.

Spočítáme:

$$\int_2^5 (x^3 - 1) \, dx, \quad \int_0^{3\pi} \sin x \, dx.$$

Příklad.

Nechť

$$f(x) := \begin{cases} 2 + x, & x \in [0, 1); \\ 0, & x = 1; \\ 1, & x \in (1, 2]. \end{cases}$$

Spočítáme:

$$\int_0^2 f(x) \, dx.$$

Věta 8.21 (per-partes pro určitý integrál)

Nechť $-\infty < a < b < \infty$. Nechť funkce u, v jsou spojité na $[a, b]$ a diferencovatelné funkce na (a, b) . Nechť jejich derivace u', v' jsou spojité na $[a, b]$ (viz poznámku níže). Pak platí

$$\int_a^b u'(x)v(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x) \, dx.$$

Derivace u, v' obecně nemusí být definovaná v krajních bodech. Tím, že „ u' je spojitá na $[a, b]$ “ tedy přesně myslíme to, že je spojitá na (a, b) a v krajních bodech má vlastní jednostranné limity. Tedy ji pak lze do těchto bodů spojitě rozšířit. Hodnoty v nich budou navíc odpovídající jednostranné derivace, viz Větu 6.19.

Příklad.

Spočítáme

$$\int_0^1 x \operatorname{arctg} x \, dx.$$

Přímá substituce v určitém integrálu

Věta 8.22 (substituce 1. druhu v určitém integrálu)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$.
Nechť funkce

$$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$$

je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a má spojitou derivaci na (α, β) . Pak platí

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x) dx.$$

- Substituce typu „**vidím derivaci**“. (Srovnejte s V 7.12.)
- Vnitřní funkce φ nemusí být monotonní.
- **Může** se stát, že $\varphi(\alpha) \geq \varphi(\beta)$, a **nevadí to**.
- Při výpočtu se **nemusíme** vracet k původní proměnné, **přepočítáme ale meze**. Viz příklad.

Příklad.

Spočítáme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x \, dx.$$

Věta 8.23 (substituce 2. druhu v určitém integrálu)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\alpha < \beta$. Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$. Nechť funkce $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ je spojitá na $[\alpha, \beta]$ a má spojitou a nenulovou derivaci na (α, β) . Nechť dále G je primitivní funkce k funkci

$$t \mapsto f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

na (α, β) . Pak platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = [G(t)]_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)}.$$

- Substituce typu „**proměnnou za funkci**“. (Srovnejte s V 7.13.)
- Ze **spojitosti a nenulovosti** φ' plyne, že je φ **ryze monotonní** na (α, β) , tudíž tam má **inverzi** φ^{-1} . Bez těchto podmínek věta **neplatí**.
- **Může** se stát, že $\varphi^{-1}(a) \geq \varphi^{-1}(b)$, a opět to nevadí.
- Při výpočtu se opět **nemusíme** vracet k původní proměnné, jen **přepočítáme meze**. Viz příklad.

Příklad.

Nechť $r > 0$. Spočítáme

$$\int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx.$$

Tipy k počítání určitých integrálů

Neváhejte využívat různých **geometrických pozorování**:

- Je graf integrandu nějaký jednoduchý geometrický obrazec?

Tipy k počítání určitých integrálů

Neváhejte využívat různých **geometrických pozorování**:

- Je graf integrandu nějaký jednoduchý geometrický obrazec?
- Dá se integrand rozdělit do jednodušších funkcí na několika intervalech?

Tipy k počítání určitých integrálů

Neváhejte využívat různých **geometrických pozorování**:

- Je graf integrandu nějaký jednoduchý geometrický obrazec?
- Dá se integrand rozdělit do jednodušších funkcí na několika intervalech?
- Je integrand sudý nebo lichý? Je to periodická funkce?

Tipy k počítání určitých integrálů

Neváhejte využívat různých **geometrických pozorování**:

- Je graf integrandu nějaký jednoduchý geometrický obrazec?
- Dá se integrand rozdělit do jednodušších funkcí na několika intervalech?
- Je integrand sudý nebo lichý? Je to periodická funkce?

Proveďte alespoň **základní kontrolu správnosti výsledku**:

- Určitý integrál **kladné** funkce **nemůže být záporný nebo nulový**.

Tipy k počítání určitých integrálů

Neváhejte využívat různých **geometrických pozorování**:

- Je graf integrandu nějaký jednoduchý geometrický obrazec?
- Dá se integrand rozdělit do jednodušších funkcí na několika intervalech?
- Je integrand sudý nebo lichý? Je to periodická funkce?

Proveďte alespoň **základní kontrolu správnosti výsledku**:

- Určitý integrál **kladné** funkce **nemůže být záporný nebo nulový**.
- Určitý integrál **omezené** funkce přes **omezený** interval **nemůže být nekonečný**.

Tipy k počítání určitých integrálů

Neváhejte využívat různých **geometrických pozorování**:

- Je graf integrandu nějaký jednoduchý geometrický obrazec?
- Dá se integrand rozdělit do jednodušších funkcí na několika intervalech?
- Je integrand sudý nebo lichý? Je to periodická funkce?

Proveďte alespoň **základní kontrolu správnosti výsledku**:

- Určitý integrál **kladné** funkce **nemůže být záporný nebo nulový**.
- Určitý integrál **omezené** funkce přes **omezený** interval **nemůže být nekonečný**.
- Neintegrovali jste přes bod, **kde neexistuje primitivní funkce?** (Zejména přes **singularitu?**)

Tipy k počítání určitých integrálů

Neváhejte využívat různých **geometrických pozorování**:

- Je graf integrandu nějaký jednoduchý geometrický obrazec?
- Dá se integrand rozdělit do jednodušších funkcí na několika intervalech?
- Je integrand sudý nebo lichý? Je to periodická funkce?

Proveďte alespoň **základní kontrolu správnosti výsledku**:

- Určitý integrál **kladné** funkce **nemůže být záporný nebo nulový**.
- Určitý integrál **omezené** funkce přes **omezený** interval **nemůže být nekonečný**.
- Neintegrovali jste přes bod, **kde neexistuje primitivní funkce?** (Zejména přes **singularitu?**)
- Hodnota určitého integrálu musí odpovídat omezení danému Důsledkem 8.8.

Určitý integrál

Nevlastní integrál

Riemann vs. Newton ještě jednou

Riemannův integrál:

- má geometrický smysl plochy pod grafem
- nevdí mu nespojitosti (je-li jich konečně mnoho)
- funguje jen pro omezené funkce na omezeném intervalu
- přímý výpočet pomocí dělení je nepraktický (pro člověka, ale ne nutně pro počítač)

Newtonův integrál:

- je abstraktním použitím primitivní funkce bez očividného geometrického smyslu
- vyžaduje primitivní funkci na celém intervalu
- funguje i pro neomezené funkce nebo neomezené intervaly
- lze prakticky spočítat

Riemann vs. Newton ještě jednou

Díky základní větě kalkulu (V 8.18) je ale (pro „dobré“ funkce) **mezi oběma integrály souvislost**, která uvedené nedostatky odstraňuje.

To, **co** počítáme, je Riemannův integrál. To, **jak** to počítáme, je Newtonův integrál.

Nyní dáme smysl „ploše pod grafem“ i pro neomezené funkce a neomezené intervaly.

Definice 8.24 (zobecněný Riemannův integrál, „jednostranná verze“)

Nechť $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Nechť funkce $f: [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená a riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[a, r]$, kde $r \in (a, b)$. Pak definujeme **zobecněný Riemannův integrál** funkce f přes interval (a, b) (nebo $[a, b]$) jako

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{r \rightarrow b-} \int_a^r f(x) \, dx,$$

pokud tato limita existuje. Je-li tento výraz konečný, řekneme, že integrál $\int_a^b f(x) \, dx$ **konverguje**.

Obdobně definujeme zobecněný Riemannův integrál $\int_a^b f(x) \, dx$, je-li f riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[s, b]$, kde $s \in (a, b)$.

Definice 8.25 (zobecněný Riemannův integrál, „oboustranná verze“)

Nechť $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$. Nechť funkce f definovaná na (a, b) je omezená a riemannovsky integrovatelná na každém intervalu $[r, s] \subset (a, b)$. Pak definujeme **zobecněný Riemannův integrál** funkce f přes interval (a, b) (nebo $[a, b]$) jako

$$\int_a^b f(x) \, dx := \lim_{r \rightarrow a+} \int_r^c f(x) \, dx + \lim_{s \rightarrow b-} \int_c^s f(x) \, dx,$$

má-li výraz vpravo smysl pro nějaké $c \in (a, b)$.

- Existence a hodnota integrálu **nezávisí na volbě c** .
- Integrál neexistuje, pokud neexistuje jedna z limit na pravé straně nebo pokud se tam vyskytne výraz „ $\pm\infty \mp \infty$ “.

Nevlastní určitý integrál

Definice 8.26 (zobecněný Riemannův integrál, „plná verze“)

Nechť $n \in \mathbb{N}$, $-\infty \leq a_0 < a_1 < \dots < a_n \leq \infty$. Nechť funkce f je definovaná na množině $\bigcup_{j=1}^n (a_{j-1}, a_j)$ a pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ existuje její zobecněný Riemannův integrál $\int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x) dx$. Pak definujeme **zobecněný Riemannův integrál funkce f přes interval (a_0, a_n)** jako

$$\int_{a_0}^{a_n} f(x) dx := \sum_{j=1}^n \int_{a_{j-1}}^{a_j} f(x) dx. \quad (36)$$

má-li výraz vpravo smysl.

Tímto způsobem je za určitých okolností umožněno „integrování přes singularity“.

Pozor! Takovýto integrál má ale smysl pouze tehdy, nevyskytuje-li se na pravé straně (36) výraz „ $\pm\infty \mp \infty$ “.

Nevlastní určitý integrál

Integrály, jejichž limity se vyskytují ve zobecněném integrálu, spočítáme standardními metodami.

Pozorování.

Má-li funkce na intervalu Riemannův integrál (neboli je-li tam riemannovsky integrovatelná), pak je její zobecněný Riemannův integrál totéž. Naopak samozřejmě ne.

Nevlastní určitý integrál

Příklad.

Rozhodneme, zda existují tyto zobecněné Riemannovy (neboli **nevlastní určité**) integrály. Pokud ano, určíme jejich hodnotu.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx, \quad \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx.$$

Nevlastní určitý integrál

Pozorování (k „oboustranné“ verzi, Def. 8.25):

Výraz

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \int_r^c f(x) \, dx + \lim_{s \rightarrow \infty} \int_c^s f(x) \, dx \quad (37)$$

obecně **není totéž**, co výraz

$$\lim_{r \rightarrow -\infty} \int_{-r}^r f(x) \, dx. \quad (38)$$

Výraz (38) může mít smysl, i pokud (37) není definovaný. Při hledání zobecněného Riemannova integrálu používáme (37).

Slogan:

„Zobecněný Riemannův integrál nefunguje pro rozdíl nekonečných ploch.“

Příklad.

Existuje zobecněný Riemannův integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx?$$

Existuje to jako Newtonův integrál?

Příklad.

Existuje zobecněný Riemannův integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, dx?$$

Existuje to jako Newtonův integrál?

Takovémuto integrálu ale lze dát smysl pomocí tzv. **hlavní hodnoty**. Uvidíme později.

Příklad.

Rozhodneme, zda existují tyto zobecněné Riemannovy integrály. Pokud ano, určíme jejich hodnotu.

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

Varovné příklady:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx \qquad \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx.$$

Věta 8.27 (zobecněné určité integrály mocnin)

Pro každé $p \in \mathbb{R}$ existují zobecněné Riemannovy integrály

$$\int_0^1 x^p dx, \quad \int_1^\infty x^p dx$$

a platí:

$$\int_0^1 x^p dx \begin{cases} = \infty, & p \leq -1; \\ < \infty, & p > -1; \end{cases}$$

$$\int_1^\infty x^p dx \begin{cases} < \infty, & p < -1; \\ = \infty, & p \geq -1; \end{cases}$$

$$\int_0^\infty x^p dx = \infty.$$

Srovnajte tuto větu také s V 9.6 pro číselné řady.

Důsledek 8.28 (určitý integrál a uspořádání)

Nechť funkce f, g jsou definované na $(a, b) \subset \mathbb{R}$ a existují jejich zobecněné Riemannovy integrály přes (a, b) . Nechť dále pro všechna $x \in (a, b)$ platí

$$f(x) \leq g(x).$$

Potom platí

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

Příklad.

Rozhodněme, zda konvergují integrály

$$\int_0^{\infty} \frac{2^x + x^9 + 1}{3^x + x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{x + 1}{(x - 2)^4} dx.$$

Konvergence zobecněných integrálů

Příklad.

Rozhodněme, zda konvergují integrály

$$\int_0^{\infty} \frac{2^x + x^9 + 1}{3^x + x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{x+1}{(x-2)^4} dx.$$

Příklad.

Určeme, pro jaké hodnoty $q > 0$ konvergují integrály

$$\int_1^{\infty} \frac{x^2 + \sin x + \ln x}{x^q + 1}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x+3}{(x+1)|x-3|^q} dx.$$

Funkce **faktoriál** je definována na množině $\mathbb{N} \cup \{0\}$ a splňuje:

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}: (n+1)! = (n+1)n!$$

Funkce **faktoriál** je definována na množině $\mathbb{N} \cup \{0\}$ a splňuje:

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}: (n+1)! = (n+1)n!$$

Otázka:

Lze najít funkci $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ takovou, aby platilo

$$\forall x \in [0, \infty): f(x+1) = (x+1)f(x)?$$

Odpovědí (až na posunutí) je **funkce gama** daná následující definicí.

Definice 8.29 (funkce gama)

Funkce gama je definována předpisem

$$\Gamma: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

a má následující vlastnosti:

- (i) $\Gamma(1) = 1$;
- (ii) $\forall x > 0: \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;
- (iii) $\forall n \in \mathbb{N}: \Gamma(n) = (n-1)!$;
- (iv) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

Tato funkce je speciálním případem tzv. **integrálu závislého na parametru**.

Definice 8.30 (hlavní hodnota integrálu)

- (i) Nechť $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < b < c$. Nechť funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalech $[a, b - \varepsilon)$, $(b + \varepsilon, c]$ pro každé $\varepsilon \in (0, \min\{b - a, c - b\})$. Pak definujeme **hlavní hodnotu integrálu funkce f přes $[a, b]$** jako

$$\text{p. v. } \int_a^c f(x) \, dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_a^{b-\varepsilon} f(x) \, dx + \int_{b+\varepsilon}^c f(x) \, dx \right),$$

má-li výraz na pravé straně smysl.

- (ii) Nechť funkce f je riemannovsky integrovatelná na intervalu $[-r, r]$ pro každé $r > 0$. Pak definujeme **hlavní hodnotu integrálu funkce f přes $(-\infty, \infty)$** jako

$$\text{p. v. } \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx := \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) \, dx,$$

má-li výraz na pravé straně smysl.

Příklad.

Určeme

$$\text{p. v. } \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx,$$

$$\text{p. v. } \int_{-\infty}^{\infty} x dx,$$

$$\text{p. v. } \int_{-\infty}^{\infty} \sin x dx,$$

$$\text{p. v. } \int_{-\infty}^{\infty} \cos x dx.$$

Hlavní hodnota integrálu

- Je-li f riemannovsky integrovatelná na (a, b) nebo existuje-li tam alespoň její zobecněný Riemannův integrál, pak

$$\text{p. v. } \int_a^b f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx.$$

- Hlavní hodnota ale může být definována, i pokud na intervalu neexistuje ani zobecněný Riemannův integrál dané funkce. To může nastat v případě „rozdílu nekonečných ploch“.
- Hlavní hodnota je nástrojem, jak popsat, že dvě nekonečné plochy „jsou stejné“.
- Využití toto najde např. ve Fourierově transformaci. V praktických úlohách se ale opět třeba **mít na pozoru**, zda má použití takového integrálu např. fyzikální smysl.

Určitý integrál

Užitý určitý integrál

Co lze popsat určitým integrálem?

- plocha pod grafem funkce
- plochy dalších rovinných útvarů vymezených grafy funkcí
- délky křivek, objemy a povrchy rotačních těles (bude lépe popsáno v MA2)
- průměrná hodnota funkce
- řada použití ve fyzice, statistice atd.

Délka grafu

Pomocí určitého integrálu můžeme zavést pojem délky křivky tvořené grafem funkce.

Definice 8.31 (délka grafu)

Nechť funkce f je spojitě diferencovatelná na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Potom **délkou grafu funkce f na intervalu (a, b)** rozumíme hodnotu

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, dx.$$

Pozorování.

Je-li funkce pouze po částech spojitě diferencovatelná, můžeme délku grafu stále stanovit jako součet délek jejích dílčích grafů na intervalech, na kterých je funkce spojitě diferencovatelná.

Příklad.

Určeme délku části paraboly dané rovnicí

$$y = x^2$$

mezi body $(-1, 1)$ a $(1, 1)$.

Příklad.

Určeme délku části paraboly dané rovnicí

$$y = x^2$$

mezi body $(-1, 1)$ a $(1, 1)$.

Pozorování.

U takovýchto příkladů obvykle nelze očekávat „jednoduché“ integrály.

Definice 8.32 (rotační plocha a těleso)

Nechť funkce f je kladná a spojitá na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$.

(i) Množinu

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = (f(x))^2, x \in (a, b)\}$$

nazveme **rotační plochou** vzniklou rotací grafu funkce f na (a, b) podle osy x .

(ii) Množinu

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq (f(x))^2, x \in (a, b)\}$$

nazveme **rotačním tělesem** vymezeným plochou P definovanou výše.

Pozorování.

Tato definice pracuje s rotací grafu podle osy x . Roli proměnných x, y, z lze libovolně zaměnit, a uvažovat tak rotaci podle jiných os.

Definice 8.33 (objem rotačního tělesa)

Nechť funkce f je kladná a spojitá na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Potom **objem rotačního tělesa** daného předpisem

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq (f(x))^2, x \in (a, b)\}.$$

definujeme jako hodnotu

$$V(T) := \int_a^b \pi (f(x))^2 dx.$$

Objem rotačního tělesa jsme pro jednoduchost takto **definovali**. Existuje obecnější definice objemu, jejímž speciálním případem je toto. Více v MA2, případně ve skriptech [T].

Příklad.

Určeme objem rotačního kužele o výšce h a poloměru podstavy r .

Povrch pláště rotačního tělesa

Definice 8.34 (povrch rotační plochy)

Nechť funkce f je kladná a spojitě diferencovatelná na intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Uvažujme rotační plochu a těleso dané předpisy

$$P := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 = (f(x))^2, x \in (a, b)\},$$

$$T := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \leq (f(x))^2, x \in (a, b)\}.$$

Potom **povrch plochy** P neboli **povrch pláště tělesa** T definujeme jako hodnotu

$$A(P) := \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Opět existuje obecnější definice pomocí tzv. **plošného integrálu**, viz MA2.

Příklad.

Určeme povrch pláště rotačního kužele o výšce h a poloměru podstavy r .

Objem rotačního tělesa

Příklad.

Určeme povrch pláště rotačního kužele o výšce h a poloměru podstavy r .

Příklad.

Určeme povrch pláště a objem tělesa v $\mathbb{R}^3$ daného předpisem

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in [1, \infty), y^2 + z^2 = \frac{1}{x^2} \right\}.$$

Takovéto příklady s rotačními tělesy budete umět řešit elegantněji v MA2 pomocí tzv. **polárních souřadnic**.

V MA2 se budete mimo jiné širěji zabývat **vícerozměrnými integrály**.

Definice 8.35 (integrální průměr)

Nechť funkce f je riemannovsky integrovatelná na omezeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Pak jejím **integrálním průměrem na intervalu** (a, b) rozumíme hodnotu

$$\int_a^b f(x) \, dx := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

Tomuto číslu se také říká **střední hodnota** funkce f na intervalu (a, b) . Pojem střední hodnoty jsme ale už používali i v jiném smyslu.

Příklad.

Určeme efektivní hodnotu napětí střídavého proudu s amplitudou U_0 .

Číselné řady

Definice a základní vlastnosti

Definice 9.1 (částečný součet a číselná řada)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost. Pro každé $k \in \mathbb{N}$ nazveme číslo

$$s_k := \sum_{n=1}^k a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$$

k -tým částečným součtem členů posloupnosti $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Posloupnost $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ pak nazveme **číselnou řadou se členy a_n** a značíme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Existuje-li

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k, \tag{39}$$

pak její hodnotu nazveme **součtem řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$** a také značíme symbolem $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje**, pokud existuje vlastní limita (39). V opačném případě řekneme, že řada **diverguje**.

Pozor!

Tato běžně používaná forma zápisu je bohužel nejednoznačná. Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ totiž značí jak **limitu**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k a_n, \quad (40)$$

tak **samotnou posloupnost**

$$(s_k)_{k \in \mathbb{N}} = \left(\sum_{n=1}^k a_n \right)_{k \in \mathbb{N}},$$

jejíž limitou hodnota (40) je (pokud tato limita existuje).

Uvažovaný smysl je tedy nutné poznat z kontextu.

Geometrická řada má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je daný parametr (**kvocient**).

Geometrická řada má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n,$$

kde $q \in \mathbb{R}$ je daný parametr (**kvocient**).

Platí toto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^n \begin{cases} = \frac{q}{1-q}, & q \in (-1, 1); \\ = \infty, & q \in [1, \infty); \\ \text{diverguje,} & q \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Harmonická řada má tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Ukážeme, že platí:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Postup, který jsme použili, je tzv. Cauchyho kondenzační kritérium.

Otázky.

- Jak poznat, jestli daná číselná řada konverguje?
- Lze i přímo najít její součet?

V MA1 se budeme zabývat první otázkou. Druhá se řeší v navazujících předmětech (MA2, KAT).

Věta 9.2 (nutná podmínka konvergence číselné řady)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost a nechť řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konverguje. Pak platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Toto je pouze **nutná** podmínka, jak je vidět na příkladu harmonické řady.

Pokud ale ověříme, že daná řada tuto podmínku **nesplňuje**, dokázali jsme, že tato řada **nekonverguje**.

Věta 9.3 (aritmetika konvergentních řad)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti a nechť $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom platí následující tvrzení.

- (i) Řada $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
- (ii) Pokud konvergují obě řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, potom konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ a navíc platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Implikaci v (ii) **nelze obrátit!**

Příklad.

Konvergují řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{b-n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} - 3^{-n}),$$

kde $b \in \mathbb{R}$?

Lze dokonce najít jejich součet?

Věta 9.4 (integrální kritérium)

Nechť $f: [1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ je kladná nerostoucí funkce. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ položme

$$a_n := f(n).$$

Potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konverguje právě tehdy, když platí

$$\int_1^{\infty} f(x) \, dx < \infty$$

ve smyslu zobecněného Riemannova integrálu.

Věta 9.5 (Cauchyho kondenzační kritérium)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je nezáporná nerostoucí posloupnost. Potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}. \quad (41)$$

- Ve (41) sčítáme vždy 2^n -krát člen na pozici 2^n v posloupnosti $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- Bez předpokladu, že $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je **nezáporná a nerostoucí**, toto **nefunguje**.

Konvergence dalších důležitých řad

Z kondenzačního kritéria (V 9.5) nebo z integrálního kritéria konvergence řad (V 9.4) a Věty 8.27 vyplývá toto důležité pozorování.

Věta 9.6 (konvergence řad s mocninou ve jmenovateli)

Nechť $p \in \mathbb{R}$. Potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konverguje právě tehdy, když $p > 1$.

Definice 9.7 (absolutní konvergence)

Nechť a_n je reálná posloupnost.

- (i) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje absolutně**, pokud konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.
- (ii) Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **konverguje neabsolutně**, pokud konverguje, ale nekonverguje absolutně.

Příklad.

Lze ukázat, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

konverguje neabsolutně.

Věta 9.8 (vztah absolutní a obyčejné konvergence)

Nechť a_n je reálná posloupnost. Pokud řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně, pak konverguje.

Číselné řady

Kritéria absolutní konvergence

Řady s nezápornými členy

V následující části budeme zkoumat **absolutní konvergenci**, tedy konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Řady s nezápornými členy

V následující části budeme zkoumat **absolutní konvergenci**, tedy konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

Taková řada má nezáporné členy, tudíž nastává **právě jedna** z možností:

(i) Řada konverguje, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

(ii) Řada diverguje k $+\infty$, tj.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Aby nastala možnost **(i)**, musejí být členy $|a_n|$ v nějakém smyslu „dost malé“, neboli „rychle konvergovat k nule“. Popíšeme přesně, co k tomu stačí.

Věta 9.9 (srovnávací kritérium)

Nechť $c \in (0, \infty)$ a necht' $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti splňující

$$|a_n| \leq c|b_n|.$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho. Pak platí tyto implikace:

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = \infty.$$

- Výrok „ $|a_n| \leq |b_n|$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho“ znamená:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0: |a_n| \leq |b_n|.$$

- Konstanta $c \in (0, \infty)$ je **univerzální** pro **všechna $n \in \mathbb{N}$** !

Limitní srovnávací kritérium

Praktičtější než samotná Věta 9.9 je tento její důsledek:

Věta 9.10 (limitní srovnávací kritérium)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jsou reálné posloupnosti. Nechť existuje limita

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_n|}{|b_n|}.$$

Pak platí následující tvrzení.

- (i) *Nechť $L \in (0, \infty)$. Pak platí: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$.*
- (ii) *Nechť $L = 0$. Pak platí: $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.*
- (iii) *Nechť $L = \infty$. Pak platí: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty$.*

Pozorování.

Hodnota L **nemůže být záporná**, protože všechny podíly $\frac{|a_n|}{|b_n|}$ jsou kladné.

Limitní srovnávací kritérium

Limitní srovnávací kritérium funguje všude tam, kde funguje základní srovnávací kritérium. Obdobná situace nastává pro limitní verze dalších kritérií, lze tedy obvykle rovnou použít je.

Příklad.

Vyšetřeme absolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - n + 4}{n^3 + 2n - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 4}{\sqrt{3n^5 - 2}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Pozorování.

O konvergenci **geometrické řady** jsme schopni snadno rozhodnout. Dokonce známe přímo i její součet (u jiných řad v MA1 jej ani znát nebudeme).

Uvedeme nyní další kritéria absolutní konvergence řad, která vyplývají ze **srovnání s geometrickou řadou**.

Věta 9.11 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná nenulová posloupnost. Pak platí tato tvrzení.

- (i) Existuje-li $q \in (0, 1)$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho platí

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q,$$

potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

- (ii) Pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho platí

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1,$$

potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Přítomnost konstanty $q \in (0, 1)$ v (i) **je důležitá**. Pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho platí **pouze**

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1,$$

řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **může divergovat**.

Věta 9.12 (limitní podílové kritérium)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná nenulová posloupnost. Pak platí tato tvrzení.

(i) *Pokud*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in [0, 1),$$

potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

(ii) *Pokud*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \in (1, \infty) \cup \{\infty\},$$

potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Pozor! Pokud je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$$

nebo limita neexistuje, **neříká** toto kritérium **nic**.

Příklad.

Vyšetřeme absolutní konvergenci řad ($a \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + n!}{n + (2n)!}.$$

Pomocí limitního podílového kritéria a nutné podmínky konvergence dostáváme tento důsledek:

Důsledek 9.13 (srovnávací limity základních posloupností)

Nechť $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Věta 9.14 (Cauchyho odmocninové kritérium)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost. Pak platí tato tvrzení.

- (i) *Existuje-li $q \in (0, 1)$ takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho platí*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q,$$

potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

- (ii) *Pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho platí*

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1,$$

potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Přítomnost konstanty $q \in (0, 1)$ v (i) **je důležitá**. Pokud pro všechna $n \in \mathbb{N}$ až na konečně mnoho platí **pouze**

$$\sqrt[n]{|a_n|} < 1,$$

řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **může divergovat**.

Věta 9.15 (limitní odmocninové kritérium)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost. Pak platí tato tvrzení.

(i) *Pokud*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, 1),$$

potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konverguje.

(ii) *Pokud*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in (1, \infty) \cup \{\infty\},$$

potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Pozor! Pokud je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

nebo limita neexistuje, **neříká** toto kritérium **nic**.

Příklad.

Vyšetřeme absolutní konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}.$$

Definice 9.16 (přerovnání řady)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost. Nechť $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je bijekce. Pak číselnou řadu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$$

nazveme **přerovnáním řady** $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Otázka: Změní přerovnání řady její konvergenci nebo součet?

Věta 9.17 (přerovnání absolutně konvergentní řady)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost a nechť řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně. Potom pro každou bijekci $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ absolutně konverguje také přerovnaná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ a platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Důkaz této věty lze najít ve skriptech [4H].

27. přednáška pokračuje slajdem 541.

Číselné řady

Neabsolutní konvergence

Připomenutí:

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje **neabsolutně**, pokud

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konverguje, ale } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty.$$

Uvedeme alespoň jedno kritérium, jak ověřit konvergenci tzv. **alternujících řad** (členy mění pravidelně znaménko), která může být neabsolutní.

Věta 9.18 (Leibnizovo kritérium)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je monotonní reálná posloupnost splňující

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (42)$$

Potom řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

konverguje.

Ani jednu z podmínek monotonie $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a (42) **nelze vynechat!**

Příklad.

Rozhodněme o absolutní/neabsolutní konvergenci řad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Věta 9.19 (Riemannova o přerovnání neabsolutně konvergentní řady)

Nechť $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je reálná posloupnost a řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje neabsolutně. Potom pro každé $L \in \overline{\mathbb{R}}$ existuje bijekce $\pi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ taková, že platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = L.$$

Důkaz této věty lze najít ve skriptech [4H].

