Pracovní materiál pro

Úvodní kurz pro „FELÁKY“

Temešvár u Písku, září 2019

Úvodem

Tento text má sloužit jako **přehled** středoškolských znalostí a dovedností, které jsou nezbytné při studiu matematiky na vysoké škole technického směru. Je koncipován jako pracovní materiál, jakási osnova, ke které bude podán komentář během kurzu. Tento text nemá za cíl být samostatným materiálem a jako takový je nevhodný, neboť velmi často opomíjí podmínky existence. K takovým účelům slouží klasické skriptum nebo učebnice, která svým rozsahem umožňuje upozornit na veškerá úskalí.

Vytýkání

$$x(\mathbf{2x+1})+(3x+2)(\mathbf{2x+1})=(\mathbf{2x+1})(x+3x+2)=(2x+1)(4x+2)=2(2x+1)^2$$

Operace se zlomky a mocninami

$$\frac{x+y}{z}=\frac{x}{z}+\frac{y}{z},\ \text{ale}\ \frac{z}{x+y}\neq\frac{z}{x}+\frac{z}{y}$$

Krácení zlomků

$$\frac{6x^2+7x}{3x}=\frac{6x+7}{3}=2x+\frac{7}{3}$$

Někdy je výhodné vytknout z čitatele i jmenovatele nejvyšší mocninu dané proměnné a následně celý zlomek pokrátit(např. při počítání limit).

$$\frac{6x^3+2x^2-7x+5}{3x^3+6x-5}=\frac{x^3(6+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3})}{x^3(3+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x^3})}=\frac{6+\frac{2}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{3+\frac{6}{x^2}-\frac{5}{x^3}}$$

Mocnění má také svá pravidla

$$\begin{aligned}a^{x+y}&=a^x\cdot a^y\\a^{x\cdot y}&=(a^x)^y=(a^y)^x\\a^{-x}&=\tfrac{1}{a^x}=\left(\tfrac{1}{a}\right)^x\end{aligned}$$

Ukažme si to na nějakých příkladech

$$2^6=2^{4+2}=2^4\cdot 2^2=16\cdot 4=64=2^6$$

$$2^6=2^{3\cdot 2}=\left(2^3\right)^2=8^2=64=2^6$$

Základní vzorce pro práci s mnohočleny

$$\begin{aligned}(A-B)(A+B)&=A^2-B^2\\A^2-B^2&=(A-B)(A+B)\\(A\pm B)^2&=A^2\pm 2AB+B^2\\A^2\pm 2AB+B^2&=(A\pm B)^2\\A^3-B^3&=(A-B)(A^2+AB+B^2)\\A^3+B^3&=(A+B)(A^2-AB+B^2)\end{aligned}$$

Některé vzorce jsou uvedeny záměrně dvakrát. Je nanejvýš vhodné vidět v součinu závorek rozklad na mnohočlen a naopak v mnohočlenu rozklad na tzv. kořenové činitele, neboli součin „nějakých“ závorek.

Doplnění na čtverec

$$Ax^2 + Bx + C = A(x^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}) = A\left(x^2 + 2\frac{B}{2A}x + (\frac{B}{2A})^2 - (\frac{B}{2A})^2 + \frac{C}{A}\right) =$$

$$= A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4A}$$

Díky této úpravě umíme snadno odvodit vzorec pro kořeny kvadratického polynomu

$$\begin{array}{rcl} Ax^2 + Bx + C & = & 0 \\ A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4A} & = & 0 \\ A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 & = & \frac{B^2}{4A} - C \\ \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 & = & \frac{B^2}{4A^2} - \frac{C}{A} \\ x_{1,2} + \frac{B}{2A} & = & \sqrt{\frac{B^2-4AC}{4A^2}} \\ x_{1,2} & = & -\frac{B}{2A} \pm \frac{\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \\ x_{1,2} & = & \frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A} \end{array}$$

Odstranění odmocniny v čitateli nebo jmenovateli zlomku

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x^2-3x+6} - \sqrt{x^2+3x-6}}{x-2} = \frac{\sqrt{x^2-3x+6} - \sqrt{x^2+3x-6}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2-3x+6} + \sqrt{x^2+3x-6}}{\underbrace{\sqrt{x^2-3x+6} + \sqrt{x^2+3x-6}}_{(\clubsuit)}} =$$

$$= \frac{x^2-3x+6-x^2-3x+6}{(x-2)\cdot(\clubsuit)} = \frac{-6x+12}{(x-2)\cdot(\clubsuit)} = \frac{-6(x-2)}{(x-2)\cdot(\clubsuit)} =$$

$$= \frac{-6}{\sqrt{x^2-3x+6} + \sqrt{x^2+3x-6}}$$

Je na místě otázka, kde tuto úpravu použijeme a jestli nám to nějak pomohlo. Odpověď je kladná - pomohlo. Například při hledání asymptoty funkce, kde budeme počítat limitu této funkce v $+\infty$. Prostým „dosazením“ do původního tvaru dostáváme $\frac{\infty-\infty}{\infty}$ což nelze vyhodnotit, ovšem po úpravě a symbolickém dosazení dostáváme $\frac{-6}{\infty+\infty}$, což se limitně blíží nule zdola, a o grafu funkce nám mnohé napoví.

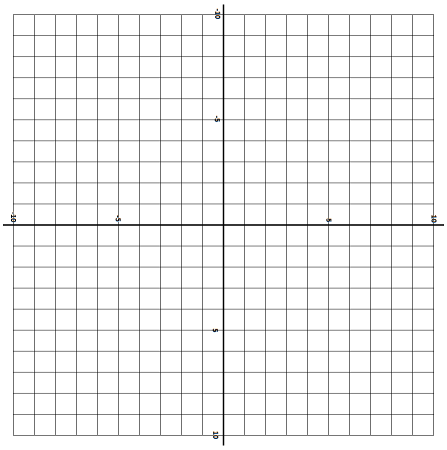
Lineární funkce

$y = kx + q \qquad q \ldots \text{absolutn len} \ - \ \text{prsek s osou } y$

$\qquad\qquad\qquad kx \ldots \text{linern len} - k \text{ uruje smrnici, rychlost rstu}$

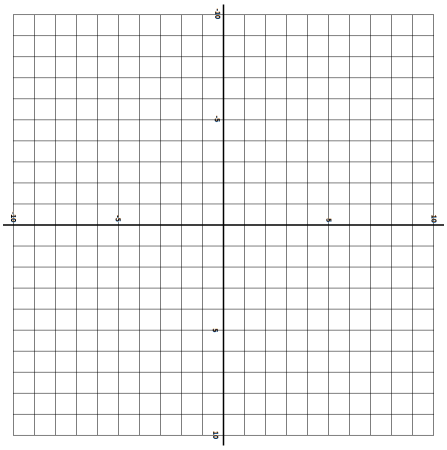
Definiční obor lineární funkce jsou všechna reálná čísla a obor hodnot také, zapisujeme to symbolicky $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$y = 1 \cdot x$



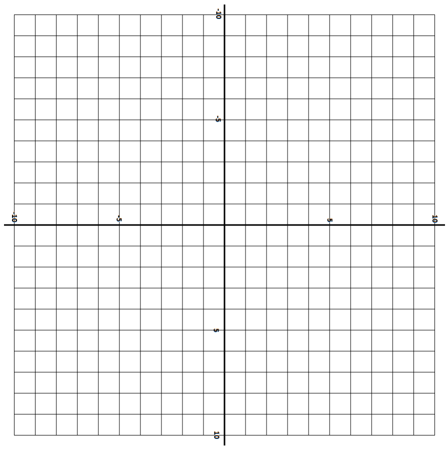
$y_1 = x + 2, \ y_2 = x + 1$

$y_3 = x, \ y_4 = x - 3$



$y_1 = 3x, \ y_2 = 2x$

$y_3 = -\frac{1}{3}x, \ y_4 = -x$



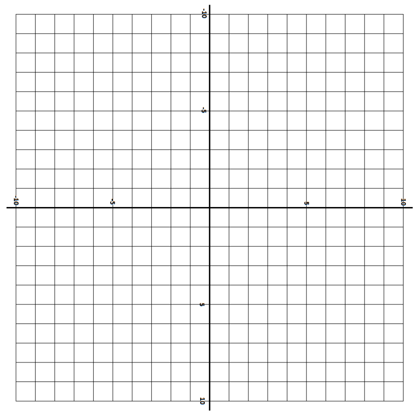
Jak nalézt lineární funkci, jsou-li dány 2 body $A = [a_1, a_2]$, $B = [b_1, b_2]$, $a_1 \neq b_1$, kterými prochází graf této funkce. Velmi jednoduše. Hledáme funkci ve tvaru $y = kx + q$ a pokud do tohoto obecného tvaru dosadíme konkrétní body, získáme soustavu 2 rovnic o 2 neznámých.

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 \cdot k + q \\ b_2 &= b_1 \cdot k + q \end{aligned}$$

Záměrně neuvádíme explicitní vyjádření pro k a q, které lze snadno získat, protože memorování pouhých vzorečků na „cokoliv“ nás odvádí od skutečné podstaty matematiky, tj. trénovat svůj mozek přemýšlením. Navíc vyřešit tuto soustavu pro konkrétní hodnoty je mnohem snažší, než dosadit daná čísla do vzorce, který si s největší pravděpodobností stejně nezapamatujeme(uvědomte si, že hodnoty a_1, a_2, b_1 a b_2 jsou konkrétní reálná čísla).

Příklad

Jsou dány body lineární funkce $A = [2, 5]$ a $B = [3, 7]$. Najděte explicitní vyjádření této funkce (její vzoreček). Nejprve si ji nakreslete a z grafu odvoďte hodnoty k a q. Potom je potvrďte výpočtem.



Kvadratická funkce

Kvadratickou funkcí nazýváme polynom druhého stupně[1]

$$y = p(x) = ax^2 + bx + c.$$

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla, oborem hodnot interval $(-\infty; c\rangle$ nebo $\langle c; +\infty)$, záleží na znaménku u vedoucího členu. Zjišťujeme kořeny, neboli řešení rovnice $p(x) = 0$. Ty jsou $\alpha_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Výraz pod odmocninou nazýváme diskriminant a označujeme $D = b^2 - 4ac$. Polynom lze poté zapsat ve tvaru součinu $p(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. Pojďme si ukázat, jak nám jednotlivé koeficienty ovlivňují chování funkce.

$D < 0 \ldots$ Polynom nemá žádné kořeny.

$D = 0 \ldots$ Polynom má jeden, tzv. dvojnásobný, kořen.

$D > 0 \ldots$ Polynom má 2 různé kořeny.

$a > 0 \ldots$ „Do grafu prší“, neboli je otevřený nahoru, připomíná písmeno V a funkce je kon**V**exní.

$a < 0 \ldots$ „Graf je jako střecha“, neboli je otevřený dolu, připomíná písmeno A a funkce je konk**Á**vní.

$c \ldots$ Stejně jako u jakékoli jiné funkce „hýbe“ grafem nahoru a dolu, nazývá se absolutní člen a určuje průsečík s osou y.

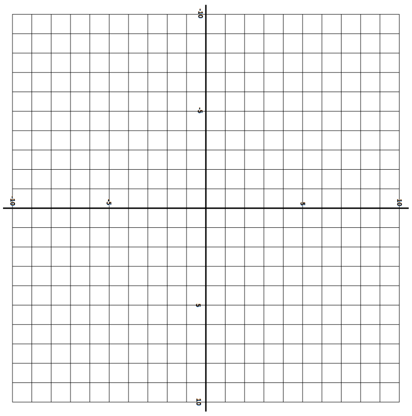
Inverzní funkcí ke kvadratické funkci je funkce druhá odmocnina, ovšem musíme si dát pozor na definiční obor.

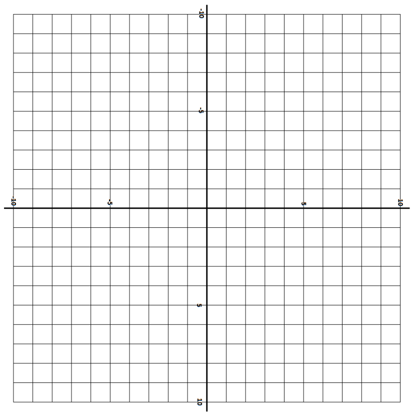
[1] Už lineární funkce byla polynomem, konkrétně prvého stupně. Polynom nultého stupně je nenulová konstantní funkce, polynom stupně -1 je nulová funkce.

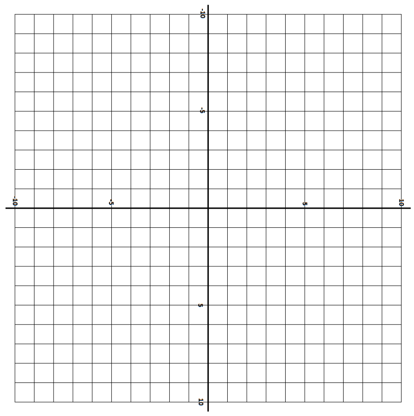
$y = x^2$

$y = 2x^2 - 12x + 10 =$
$= 2(x-1)(x-5)$

$y = -x^2 - 1$







Mocninné funkce

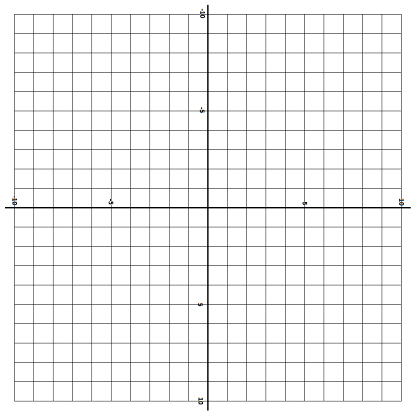
Mocninou funkcí máme na mysli funkci ve tvaru

$$y = x^a.$$

Definiční obor mocninné funkce nemusí být vždy všechna reálná čísla, velmi záleží na charakteru exponentu.

$y = x^n,\ n \in \mathbb{N}$, tedy přirozená mocnina. Definiční obor jsou všechna reálná čísla a s touto funkcí není jakýkoliv problém. Dokonce pokud je n liché, je funkce prostá a tedy existuje k ní funkce inverzní.

$y_1 = x^2,\ y_2 = x^3$



$y = x^{\frac{p}{q}},\ p \in \mathbb{Z} - \{0\},\ q \in \mathbb{N}$, tedy racionální mocnina. Lze také psát $y = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$. Definiční obor závisí na paritě p a q. Pokud je p sudé, pak nezáleží na q a definiční obor jsou všechna reálná čísla, stejně tak pokud je p liché a q také liché. Zbývá možnost, kdy je p liché a q sudé. V tomto případě je definičním oborem interval $\langle 0; \infty)$.

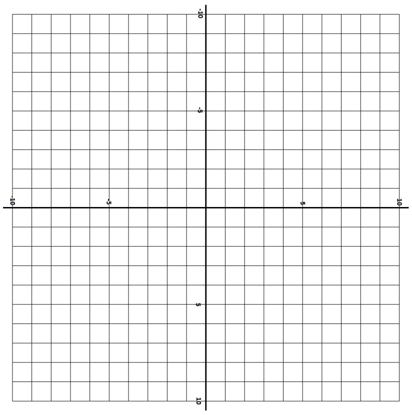
$y = x^c,\ c \in \mathbb{R}$, tedy reálná mocnina. V tomto případě není nutné provádět hlubší analýzu a stačí se omezit na kladná reálná čísla, tedy interval $(0;\infty)$.

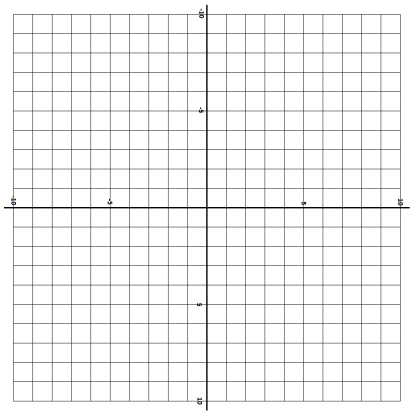
Lomené a racionální funkce

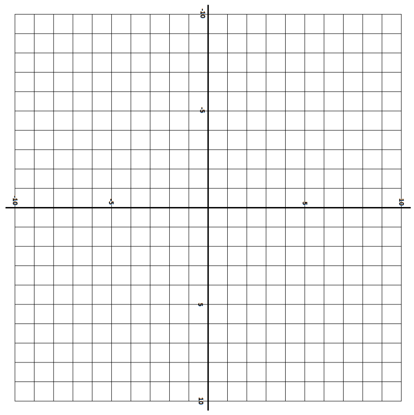
Nutno hned úvodem podotknout, že definiční obor a obor hodnot racionální funkce nemusí být všechna reálná čísla. Graf racionální funkce může mít různé podoby. Grafem lomené funkce je hyperbola.

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{\frac{a}{c}(cx+d)+b-\frac{ad}{c}}{cx+d} = \frac{b-\frac{ad}{c}}{c(x+\frac{d}{c})} + \frac{a}{c} = \frac{K}{x+\frac{d}{c}} + Q.$$

$y = -\frac{1}{x}$ $\qquad$ $y = \frac{2x+7}{x+3} = \frac{1}{x+3} + 2$ $\qquad$ $y = \frac{K}{x+\frac{d}{c}} + Q$







Obecně u racionální funkce ve tvaru „$\frac{\text{polynom}}{\text{polynom}}$“ nejprve vyšetříme body „singularity“ tj. kdy je jmenovatel roven nule a čitatel nikoliv. Při tom využijeme hledání kořenů polynomu a dělení polynomu polynomem. Hlubší analýza je nad rámec tohoto textu.

Exponenciální a logaritmické funkce

Exponenciální funkce je tvaru

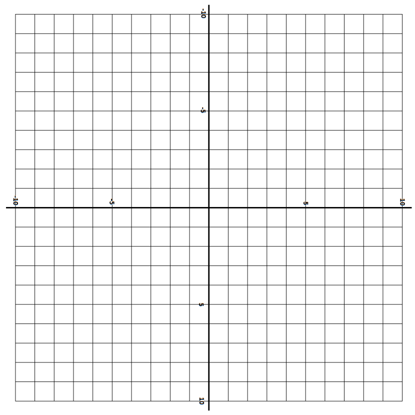
$$y = f(x) = a^x,\ a > 0.$$

Definičním oborem jsou všechna reálná čísla, oborem hodnot kladná reálná čísla, tzn. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Seciálním případem a jednou z nejdůležitějších funkcí v matematické analýze vůbec je funkce e^x, tzn. přirozená exponenciála[2]. Jejím základem je Eulerovo číslo $e \doteq 2,72$. Není nutné si toto číslo přesně pamatovat (stejně tak jako π).

[2]Hodně příkladů se řeší právě převedením na „nějaký“ tvar exponenciální funkce, se kterým pak už umíme pracovat dál. Pokud bychom šli ještě hlouběji, tak pomocí exponenciální funkce můžeme definovat např. goniometrické funkce. Využíváme ji také při řešení diferenciálních rovnic a v mnoha dalších praktických aplikacích, ale to už je látka vysoké školy.

Pro přibližný výpočet stačí, že je to skoro 3 a přesnější výpočty provádíme pomocí nějakého programu na počítači, který má Eulerovo číslo někde uložené v paměti v dostatečné přesnosti. Exponenciální funkce e^x je prostá a na celém svém definičním oboru rostoucí a konvexní. Je zdola omezená a prochází bodem $[0;1]$. Důležitou vlastností je, že je derivací sama sebe, tzn. $(e^x)' = e^x$, což znamená, že v každém bodě definičního oboru je rychlost růstu rovna funkční hodnotě.

$y = e^x$



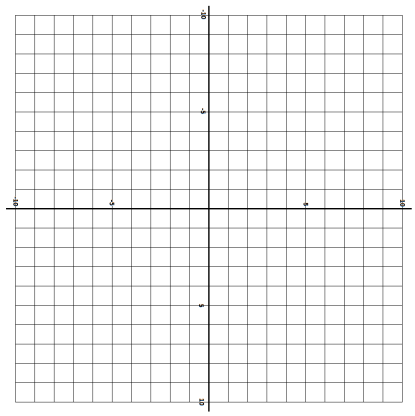
Funkce logaritmus

$$y = f(x) = \log_a\ x,\ a > 0$$

je inverzní k exponenciální funkci a^x. Definiční obor jsou kladná reálná čísla a obor hodnot všechna reálná čísla, tzn. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

Speciálním příkladem je funkce přirozený logaritmus $\ln\ x$, kde základem je Eulerovo číslo. Přirozený logaritmus je funkce prostá, rostoucí a konkávní na celém definičním oboru a graf prochází bodem $[1;0]$. Zmíníme i derivaci $(\ln\ x)' = \frac{1}{x}$. Bude to velmi potřeba zejména při integrování.

$y = \ln\ x$

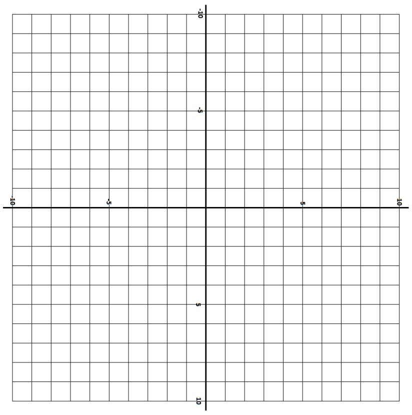


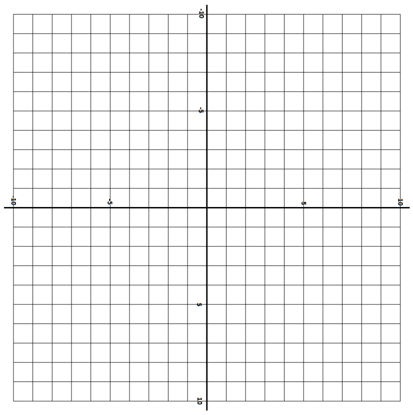
V následujících příkladech si udělejte představu o průběhu logaritmických a exponenciálních funkcí při různých základech.

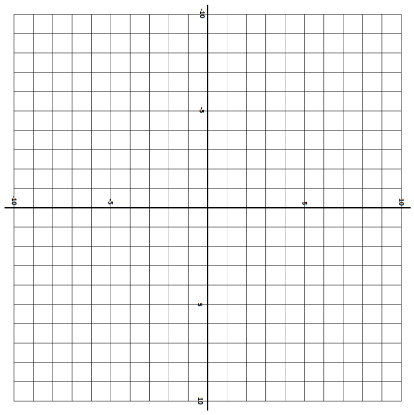
$y_1 = e^x,\ y_2 = \ln x$

$y_1 = 2^x,\ y_2 = e^x$
$y_3 = 10^x,\ y_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
$y_5 = \left(\frac{1}{e}\right)^x,\ y_6 = \left(\frac{1}{10}\right)^x$

$y_1 = \log_2 x,\ y_2 = \ln x$
$y_3 = \log_{10} x,\ y_4 = \log_{\left(\frac{1}{2}\right)} x$
$y_5 = \log_{\left(\frac{1}{e}\right)} x,\ y_6 = \log_{\left(\frac{1}{10}\right)} x$







Pro počítání s logaritmy bychom si měli pamatovat několik základních vzorců

$$
\begin{aligned}
\log_a x \cdot y &= \log_a x + \log_a y \\
\log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \\
\log_a x^y &= y \cdot \log_a x \\
x^y &= e^{y \cdot \ln x}
\end{aligned}
$$

ale pozor, nejsou žádné vzorce pro

$$
\begin{aligned}
\log_a (x \pm y) &= ??? \\
(\log_a x) \cdot (\log_a y) &= ???\ .
\end{aligned}
$$

Goniometrické a cyklometrické funkce

Goniometrické funkce jsou

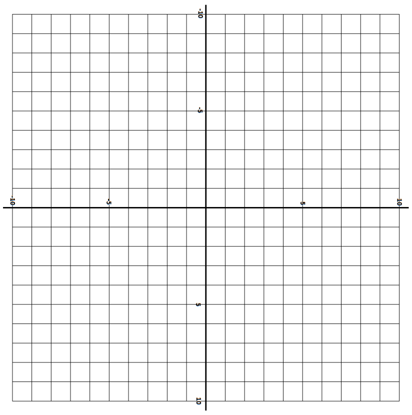
$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x.$$

Funkce sinus a cosinus jsou zobrazení z množiny reálných čísel do intervalu $< -1; 1 >$

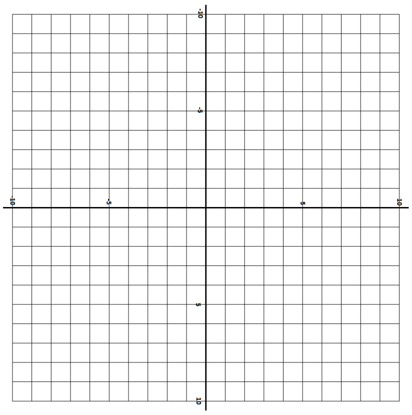
$$
\begin{aligned}
\sin &: \mathbb{R} \to < -1; 1 > \\
\cos &: \mathbb{R} \to < -1; 1 > .
\end{aligned}
$$

Jsou to funkce spojité, omezené a periodické s periodou 2π. Nejsou monotónní ani prosté.

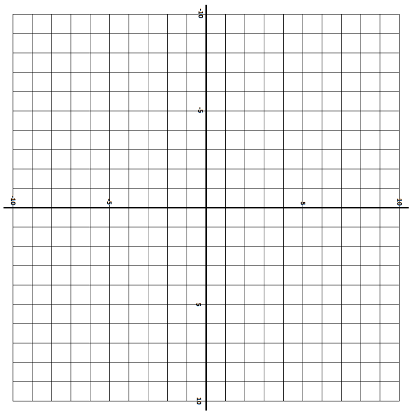
$y = \sin x$



$y = \cos x$



$y_1 = \sin x,\ y_2 = \sin 2x$
$y_3 = 2\sin x,\ y_4 = \sin(x+2)$
$y_5 = 2 + \sin x$

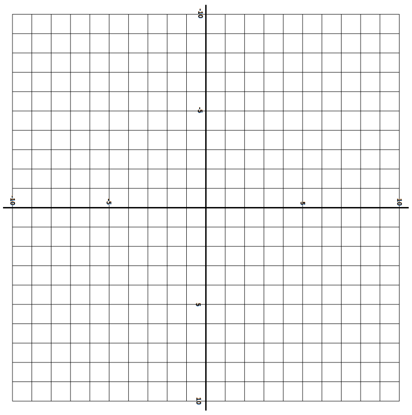


Funkce tangens a cotangens jsou zobrazení z množiny reálných čísel vyjma bodů nespojitosti do množiny reálných čísel.

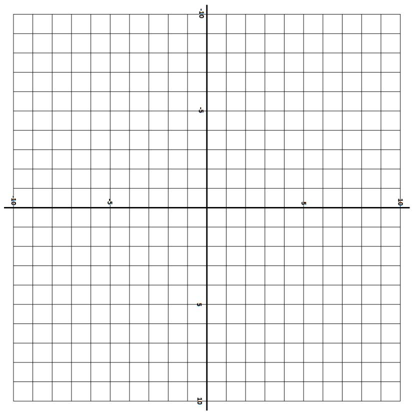
$$\begin{aligned} \mathrm{tg} &: \mathbb{R}\backslash\{k\pi + \tfrac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ \mathrm{cotg} &: \mathbb{R}\backslash\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

Jsou to funkce nespojité, neomezené, periodické s periodou π a nejsou prosté.

$y = \mathrm{tg}\, x$



$y = \mathrm{cotg}\, x$



Opět platí několik vztahů mezi goniometrickými funkcemi, které je dobré si pamatovat.

$$\begin{aligned} \mathrm{tg}\, x &= \tfrac{\sin x}{\cos x},\ x \neq \tfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \mathrm{cotg}\, x &= \tfrac{\cos x}{\sin x} = \tfrac{1}{\mathrm{tg}\, x},\ x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\ 1 &= \sin^2 x + \cos^2 x \\ \sin 2x &= 2 \sin x \cos x \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$$

A několik vztahů, o kterých je dobré vědět, že existují a pokud budou potřeba, lze je dohledat.

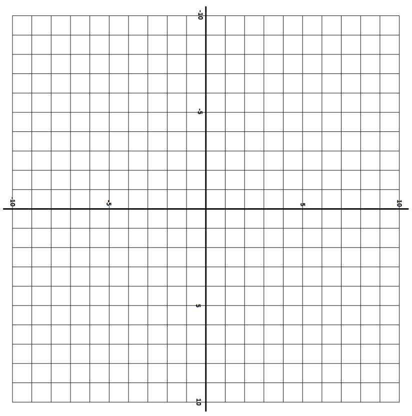
$$
\begin{aligned}
\sin(-x) &= -\sin x & \sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x \sin y \\
\cos(-x) &= \cos x & \sin(x-y) &= \sin x\cos y - \cos x \sin y \\
\mathrm{tg}\,(-x) &= -\mathrm{tg}\, x & \cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x \sin y \\
\mathrm{cotg}\,(-x) &= -\mathrm{cotg}\, x & \cos(x-y) &= \cos x\cos y + \sin x \sin y \\
\mathrm{tg}\, 2x &= \tfrac{2\mathrm{tg}\, x}{1-\mathrm{tg}^2 x} & \mathrm{tg}\,(x-y) &= \tfrac{\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, y}{1+\mathrm{tg}\, x\cdot \mathrm{tg}\, y} \\
\left|\sin \tfrac{x}{2}\right| &= \sqrt{\tfrac{1-\cos x}{2}} & \sin x + \sin y &= 2\sin\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} \\
\left|\cos \tfrac{x}{2}\right| &= \sqrt{\tfrac{1+\cos x}{2}} & \sin x - \sin y &= 2\sin\tfrac{x-y}{2}\cos\tfrac{x+y}{2} \\
\left|\mathrm{tg}\, \tfrac{x}{2}\right| &= \sqrt{\tfrac{1-\cos x}{1+\cos x}} & \cos x + \cos y &= 2\cos\tfrac{x+y}{2}\cos\tfrac{x-y}{2} \\
& \quad x \neq (2k+1)\pi, k\in\mathbb{Z} & \cos x - \cos y &= -2\sin\tfrac{x+y}{2}\sin\tfrac{x-y}{2}
\end{aligned}
$$

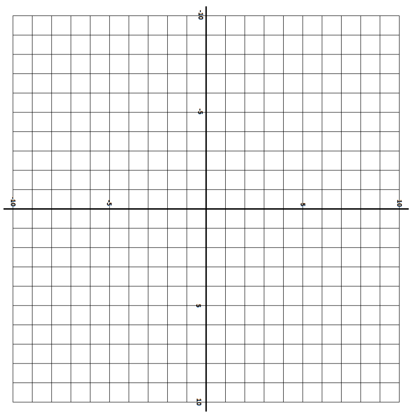
Cyklometrické funkce jsou inverzní k funkcím goniometrickým.

$$
\begin{aligned}
\arcsin x &: \; <-1;1> \to < -\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2} > & \mathrm{arctg}\, x &: \; \mathbb{R} \to < -\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2} > \\
\arccos x &: \; <-1;1> \to < 0; \pi > & \mathrm{arccotg}\, x &: \; \mathbb{R} \to < 0; \pi >
\end{aligned}
$$

S těmito funkcemi se setkáte při derivování a integrování např. racionálních funkcí, proto je zde zmiňujeme.

$y_1 = \arcsin x,\ y_2 = \arccos x$ $\qquad$ $y_1 = \mathrm{arctg}\, x,\ y_2 = \mathrm{arccotg}\, x$





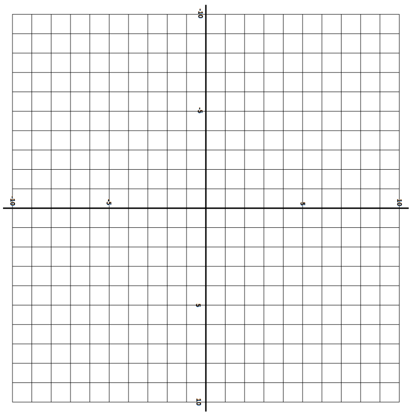
Nakonec uvedeme tabulku hodnot goniometrických funkcí ve „významných“ bodech.

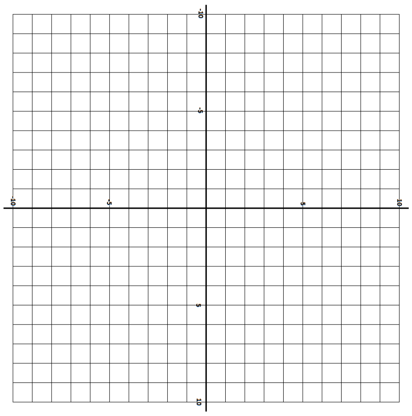
v radinech	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
ve stupch	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\mathrm{tg}\, x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$	0
$\mathrm{cotg}\, x$	$\times$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\times$

Ostatní funkce

Funkcemi tzv. nezařaditelnými do nějaké škatulky a přesto používanými jsou funkce absolutní hodnota a signum, neboli znaménko. Absolutní hodnota přiřadí zápornému reálnému číslu jeho (-1)-násobek, zbylé hodnoty ponechá. Funkce signum přiřadí záporným číslům hodnotu (-1) kladným číslům $(+1)$ a nule přiřadí nulu.

$$y = |x| = \left\langle \begin{array}{ll} -x, & x < 0 \\ & \\ x, & x \geq 0 \end{array} \right. \qquad y = \operatorname{sgn} x = \left\langle \begin{array}{rl} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{array} \right.$$





Substituce a skládání funkcí

Důležitou dovedností, kterou by měli středoškoláci ovládat je substituce. Zjednodušeně lze říci, že „vyměníme“ obrázek za obrázek. Samozřejmě to tak jednoduché není, musíme si dávat pozor, zda substitujeme správné typy objektů. Substituce není nic, co by samo o sobě vyřešilo příklad, je to pouze nástroj, kterým si dopomůžeme ke zjednodušení nebo převedení na příklad, který už umíme řešit. Na konci výpočtu nesmíme zapomenout provést substituci zpátky, aby výsledek dával smysl.

Stejně tak rozumět tomu, co je skládání funkcí a umět rozložit nějakou „složitější“ funkci na základní, elementární funkce. Kdybychom chtěli jít tzv. „na dřeň“ tak funkce $h(x) = 2x$ je složena z binární funkce součinu $s(x, y) = x \cdot y$ a dvou unárních elementárních funkcí $f(x) = 2$ a $g(x) = x$. Symbolicky bychom to zapsali $h(x) = s(f(x), g(x))$. Proč je tak důležité umět rozložit funkci se ukáže u derivování, kde si samozřejmě nelze pamatovat vzoreček pro derivaci jakékoliv funkce, ale pamatujeme si pouze derivace základních funkcí a principy pro derivování funkcí z nich složených. Můžeme uvést příklad skládání funkcí.

$$\begin{array}{ll} g(x) = x^2 & h_1(x) = g(f(x)) = \sin^2 x \\ f(x) = \sin x & h_2(x) = f(g(x)) = \sin(x^2) \end{array}$$

Zkuste si vyhodnotit funkce v bodě $x = \pi$.

$$h_1(x) = h(\pi) = g(f(\pi)) = \sin^2 \pi = 0^2 = 0$$
$$h_2(x) = f(g(\pi)) = \sin(\pi^2) \doteq \sin(9,87) \doteq 0,17 \neq 0$$

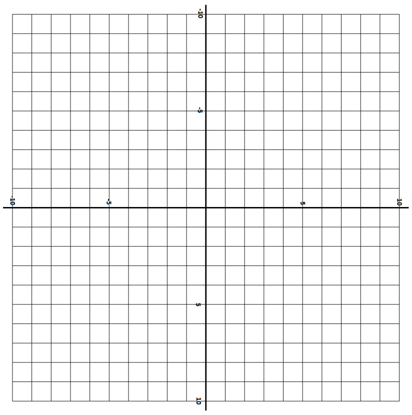
Abychom si udělali rychlou představu o tom, jak se funkce chová, je užitečné znát, jak základní modifikace přičtení nebo vynásobení číslem danou funkci změní.

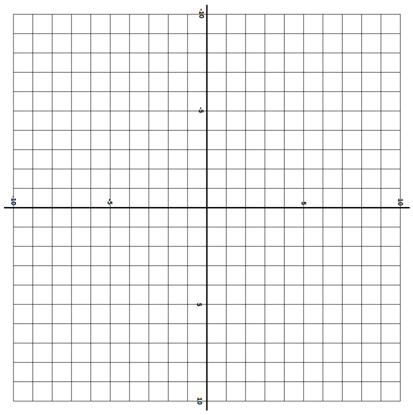
$f(x)$	pvodn funkce
$A \cdot f(x)$	zvt $A -$ krt amplitudu funkce
$f(B \cdot x)$	zvt $B -$ krt frekvenci funkce
$f(x + C)$	posune graf funkce o $C -$ vlevo
$f(x) + D$	posune graf funkce o $D -$ nahoru

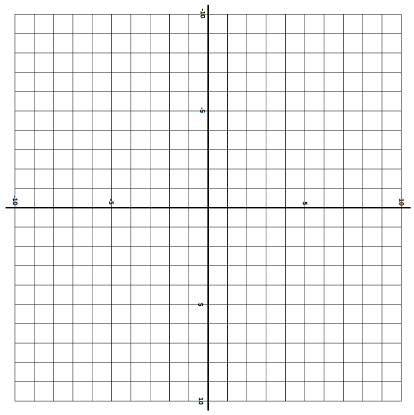
Názorně si to můžeme ukázat na goniometrických funkcích

$y_1 = \sin x$; $y_2 = 2 \sin x$ $y_1 = \sin x$; $y_2 = \sin(x + 2)$ $y = 2 \sin(\frac{x}{2} - \pi) + 1$

$y_3 = \sin 2x$ $y_3 = \sin x + 2$





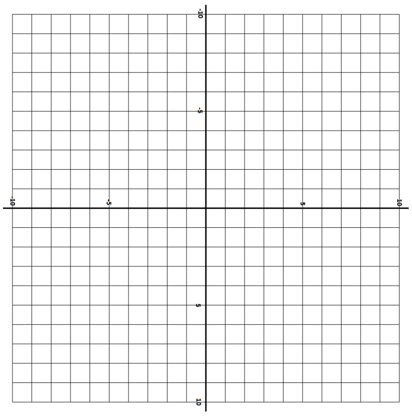


Soustavy rovnic a nerovnic

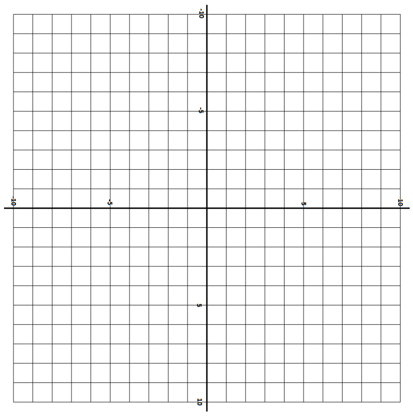
K dalším dovednostem patří umět vyřešit nějakou rovnici nebo nerovnici resp. jejich soustavy. Uplatní se vše, co bylo napsáno výše, tj. vlastnosti funkcí, jejich nulové body, substituce atd... Také dost často může pomoci grafické znázornění. S nerovnostmi, resp. jejich soustavami se setkáme při hledání definičního oboru komplikovanějších funkcí.

Příklad Řešte početně i graficky

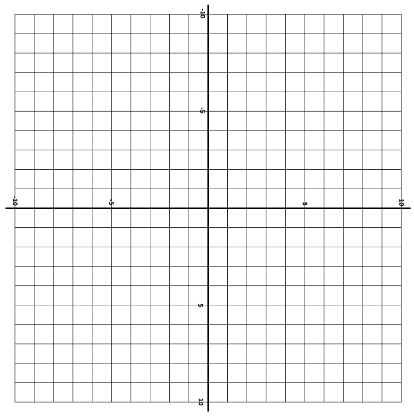
$\sin(\frac{\pi x}{2}) = x^2$



$$\begin{aligned} 2x - y &= 5 \\ x + y &= 1 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -x + 2y &> 2 \\ x + y &< 6 \end{aligned}$$



Příklad Najděte definiční obor funkce $f(x) = \ln(x - \sqrt{5x-6})$. Potřebujeme hlídat podmínku pro odmocninu $5x - 6 \geq 0$ a pro logaritmus $x - \sqrt{5x-6} > 0$. Výsledek je $x \in < \frac{6}{5}; 2) \cup (3; \infty)$.

Množiny

Možná nadpis vyvolá trochu nostalgie nebo úsměv nad něčím tak jednoduchým, co se probírá už na 1. stupni ZŠ. Avšak je skutečně potřeba pro další studium umět popsat nějakou množinu jazykem matematiky. $M = \{x \in P;\ x$ má nějakou vlastnost$\}$. Vždy musíme uvést jaký typ objektů množina popisuje a jakou mají vlastnost. Uveďme několik příkladů:

$$\begin{aligned} M &= \{x \in \mathbb{Z};\ \exists k \in \mathbb{Z},\ x = 3k\} \\ M &= \{x \in \mathbb{R};\ \sin x = 1\} \\ M &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x + y > 2,\ x - y < 1,\ x > 0,\ y < 4\}. \end{aligned}$$

Množiny můžeme sjednocovat $(X \cup Y)$, pronikat $(X \cap Y)$ a dokonce i odčítat $(X \setminus Y)$.

Logikické spojky a výroky

U logických formulí je nejdůležitější jim skutečně rozumět, nikoliv pouze umět je vyhodnotit. To ostatně není nic těžkého. Vyplnit tabulku nul a jedniček postupně krok za krokem je jen mechanická činnost. V praxi se nepotkáme přímo s logickými formulemi, ale s nějakým slovním vyjádřením jistých vztahů a jejich porozumění a převedení na logickou formuli je ta důležitá dovednost. Zejména porozumění pojmu implikace a rozdíl mezi implikací a ekvivalencí jsou důležité znalosti. V tomto odstavci ještě zmíníme kvantifikátory ($\forall x \in M$, $\exists x \in M$). Značky, které říkají zda se uvedená vlastnost týká všech prvků dané množiny ($\forall$) nebo zda existuje alespoň jeden prvek s danou vlastností ($\exists$) z této množiny.

Příklady

Zkraťte následující zlomky

$$\text{a)}\ \frac{72abx}{84aby};\ \text{b)}\ \frac{a^2-ab}{ab-b^2};\ \text{c)}\ \frac{y+1}{n+ny};\ \text{d)}\ \frac{x^2-1}{xs-s}\text{e)}\ \frac{p^2-2pq+q^2}{p^2-q^2};\ \text{f)}\ \frac{4a^2-1}{4a^2-4a+1};$$

$$\text{g)}\ \frac{9z^2-12z+4}{3z-2};\ \text{h)}\ \frac{16-8a+a^2}{ab-4b};\ \text{i)}\ \frac{a^2+2ab+b^2-c^2}{a^2+2ac+c^2-b^2};\ \text{j)}\ \frac{p^2-4}{pq+2q-p-2};$$

$$\text{k)}\ \frac{ab+2b-ac-2c}{ab-2b-ac+2c};\ \text{l)}\ \frac{xy-y-x^2+x}{xy+y-x^2-x};\ \text{m)}\ \frac{3uv+9v-2u-6}{3uv-2u-9v+6};\ \text{n)}\ \frac{a^2+2a-15}{3a+15};$$

$$\text{o)}\ \frac{r^2-4}{r^2+5r+6};\ \text{p)}\ \frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6};\ \text{q)}\ \frac{a^2-a-20}{a^2+a-30};\ \text{r)}\ \frac{3x^2+x-10}{4x^2+x-14};\ \text{s)}\ \frac{a^3-1}{a^2-1}.$$

Řešte kvadratickou rovnici doplněním na čtverec

$$\text{a)}\ \ x^2-6x-7=0;\quad \text{b)}\ \ x^2+2x=3;\quad \text{c)}\ \ x^2+12x=64.$$

Převeďte na mocniny s racionálním exponentem

$$\text{a)}\ \frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[12]{a^5}};\quad \text{b)}\ \frac{\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt[3]{b^{-1}}}{\sqrt[6]{ab}}.$$

Řešte logaritmické rovnice (symbol log znamená dekadický logaritmus)

$$\text{a)}\ \log(4x+6)-\log(2x-1)=1;\quad \text{b)}\ \log(x+3)-\log 5=\log(x-3)-\log 2;$$

$$\text{c)}\ \log(x+1)+\log(x-1)-\log x=\log(x+2);\quad \text{d)}\ \log(x^2-1)-\log(x+1)=2;$$

$$\text{e)}\ \log x-\frac{3}{\log x}=2;\quad \text{f)}\ 1+\log x^3=\frac{10}{\log x}.$$

Řešte rovnice

$$\text{a)}\ \sin^2 x-2\sin x\cos x-\cos^2 x=0;\quad \text{b)}\ 6\sin^2 x+3\sin x\cos x-5\cos^2 x=2$$

$$\text{c)}\ \frac{1+\cos x}{\sin x}=2\mathrm{tg}\,\frac{x}{2};\quad \text{d)}\ \cos 2x+\sin 2x=\cos x+\sin x.$$

Rozložte na elementární funkce

$$\text{a)}\ \frac{\sin 2x}{1+\sqrt{\ln x}};\quad \text{b)}\ 1-2(\sin x)^{3x};\quad \text{c)}\ x\cdot\cos 2x\cdot\sqrt{x+3}.$$