Výsledky z domácí úlohy z 10. cvičení

8.12.2011

.

H1 Máme
$$\lim_{x\to 0}(\frac{4^x+9^x}{2})^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{(\frac{1}{x}\log\frac{4^x+9^x}{2})} \overset{Volsf}{=} e^{\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}\log\frac{4^x+9^x}{2})},$$
protože funkce $x \to e^x$ je spojitá na celém $\mathbb{R}$. Počítejme tedy
$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\log\frac{4^x+9^x}{2} = \lim_{x\to 0}\frac{\log\frac{4^x+9^x}{2}}{\frac{4^x+9^x}{2}-1}\cdot\frac{\frac{4^x-1}{2}+\frac{9^x-1}{2}}{x} \underset{VOLSF}{\overset{VOAL}{=}} 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{4^x-1}{2x}+\lim_{x\to 0}\frac{9^x-1}{2x} =$$
$$= \lim_{x\to 0}(\frac{e^{x\log 4}-1}{2x\log 4}\log 4)+\lim_{x\to 0}(\frac{e^{x\log 9}-1}{2x\log 9}\log 9) \underset{Voal}{\overset{Volsf}{=}} \frac{\log 36}{2} = \log 6.$$
VOLSF lze použít, protože pro každé $x\in\mathbb{R}$ platí $\frac{4^x+9^x}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$. Zároveň Volsf jsme mohli použít, protože funkce $x \to x\log a$, $a\in(0,\infty)$ je prostá. Tedy je
$$\lim_{x\to 0}(\frac{4^x+9^x}{2})^{\frac{1}{x}} = e^{\log 6} = 6.$$

H2
$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{2\cot x} \overset{VOLSF}{=} e^{\lim_{x\to 0} 2\cot x\log(\cos x+\sin x)},$$
neboť exponenciála je spojitá. Počítáme
$$\lim_{x\to 0} 2\cot x\log(\cos x+\sin x) = \lim_{x\to 0} 2\cos x\frac{\log(\cos x+\sin x)}{\cos x+\sin x-1}\cdot\frac{\cos x+\sin x-1}{\sin x} \underset{VOAL}{\overset{VOLSF}{=}} 2\lim_{x\to 0}(\frac{\cos x-1}{\sin x}+1) =$$
$$= 2\lim_{x\to 0}(\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{x}{\sin x}\cdot x+1) \overset{VOAL}{=} 2\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 1\cdot 0+2 = 2.$$
Větu o limitě složené funkce šlo použít, protože existuje jisté prstencové okolí nuly, na kterém se funkce $x \to (\cos x+\sin x)$ nerovná jedničce. Tedy
$$\lim_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{2\cot x} = e^2.$$

H3 Jelikož je pro každé $n\in\mathbb{N}$ výraz $\log(1+\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})$ záporný, vyšetříme konvergenci řady
$$\sum_{n=2}^{\infty} -\log(1+\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}).$$
Srovnejme limitně s $1/n$:
$$\lim_{n\to\infty}\frac{-\log(1+\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})}{\frac{1}{n}} \overset{VOAL}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2+1}} =$$
$$\overset{HEINE}{=} 1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1-n^{-2}}+\sqrt{1+n^{-2}}} \overset{HEINE}{=} 1\in(0,\infty).$$
Heineho věta lze využít, neboť $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1} = 0$ a pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí $\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1}\neq 0$ a podruhé, protože odmocnina jako vnější funkce je spojitá v bodě 1. Jelikož řada $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=2}^{\infty}(-\log(1+\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})$, ergo i řada $\sum_{n=2}^{\infty}(\log(1+\sqrt{n^2-1}-\sqrt{n^2+1})$.