Výsledky z domácí úlohy z 11. cvičení

15.12.2011

.

H1 Dosadíme a spočítáme.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(x+h)}{(x+h)^2+1}-\frac{2x}{x^2+1}}{h}\overset{VOAL}{=}2\lim_{h\to 0}\frac{-x^2h-xh^2+h}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)}=2\lim_{h\to 0}\frac{-x^2-xh+1}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}=\frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

H2 Po dosazení zjistíme, že se jedná o limitu typu $\frac{0}{0}$, proto použijeme l'Hospitalovo pravidlo.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log\cos x+\frac{x^2}{2}}{x^4}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x+x}{4x^3}$$

Dokud vidíme, že jde o limitu typu $\frac{0}{0}$, můžeme používat k výpočtu limity l'Hospitalovo pravidlo. Tedy

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x+x}{4x^3}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\cos^2 x}+1}{12x^2}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{\sin x}{\cos^3 x}}{12x}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1+3\sin^2 x}{\cos^4 x}}{12}=-\frac{1}{12}.$$

H3 Vezměme například funkci $f(x)=|1-|x||,\ x\in\mathbb{R}$. Z grafu funkce je jasné, že v bodech $-1,0,1$ nebude existovat derivace. Ověřme to například pro bod 1 spočítáním derivace zprava a zleva:

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{|1-|1+h||-|1-|1||}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|1-|1+h||}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|1-1-h|}{h}\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1,$$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{|1-|1+h||-|1-|1||}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|1-|1+h||}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|1-1-h|}{h}\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1.$$

Jelikož se derivace f zprava a zleva v bodě 1 nerovnají, funkce nemá v 1 derivaci. Obdobně například v 0.

H4 Takovou funkcí je například $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x\in\mathbb{R}$ a oním bodem je nula. Je totiž

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{0+h}-\sqrt[3]{0}}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{h}}\right)^2=\infty.$$