Výsledky z 2. domácího úkolu

13.10.2011

.

H1

a) $D_f = (-1,1)$, $H_f = \mathbb{R}$. $f^{-1}(t) = \frac{1-e^t}{1+e^t}$, $t \in H_f$.

b) $D_f = [0,1]$, $H_f = [\min(a,b), \max(a,b)]$. Pokud $a \neq b$, pak $f^{-1}(t) = \frac{t-b}{a-b}$, $t \in H_f$.

H2 Označme množiny postupně A, B, C, D.

a) $\sup A = 3$, $\inf A = 1$.

sup: $i)$ $(\forall n \in \mathbb{N} : 3 - \frac{2}{n} \leq 3) \Leftrightarrow (\forall x \in A : \; x \leq 3)$. $ii)$ pro $c < 3$ najdu $n_0 := [\frac{1}{3-c}] + 1$, tedy $\forall c < 3\ \exists x \in A : \; x > c$, protože lze volit $x := 3 - \frac{2}{n_0}$.
inf : $i)$ $(\forall n \in \mathbb{N} : \; 1 \leq 3 - \frac{2}{n}) \Leftrightarrow (\forall x \in A : \; x \geq 1)$. $ii)$ pro $c > 1$ vezmu $x = 1$, neboť $x \in A$ a $x < c$.

b) $\sup B = 1$, $\inf B = -1$.

sup: $i)$ jistě $\forall x \in (-1,1) : \; x \leq 1$. $ii)$ pro $0 < c < 1$ volím $x := c + \frac{1-c}{2}$, pak $x \in B$ a $x > c$, pro $c < 0$ volím $x := \frac{1}{2}$. Infimum analogicky.

c) $\sup C = 1$, $\inf C = -1$.

sup: $i)$ zřejmě $\forall n \in \mathbb{N} : \; \cos(\pi - \frac{\pi}{n}) \leq 1$. $ii)$ pro $c < 1$ vezmu $n_0 = 1$ a tedy $\cos(\pi - \pi) = \cos 0 = 1 > c$.
inf: $i)$ $\forall n \in \mathbb{N} : \; \cos(\pi - \frac{\pi}{n}) \geq -1$. $ii)$ pro $1 \geq c > -1$ vol $n_0 := [\frac{\pi}{\pi - \arccos c}] + 1$, pak $\cos(\pi - \frac{\pi}{n_0}) < c$.
Pro $c > 1$ volím $x := 1$.

d) $\sup D = 1$, $\inf D = 0$.

Nejprve dokážu, že $D := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [-\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}] = [0,1]$. K tomu je třeba ukázat především, že $D \subseteq [0,1]$, neboť opačná inkluze je zřejmá. Dokážeme sporem. Nechť tedy existuje $x \in D$, pro které platí $x < 0$ nebo $x > 1$. Pokud $x < 0$, tvrdím, že existuje $k_0 \in \mathbb{N}$, takové, že $x < \frac{-1}{k_0}$. Opravdu, z archimédovy vlastnosti přirozených čísel existuje $k_0 \in \mathbb{N}$ splňující $k_0 > \frac{-1}{x}$. Potom je ale $x < \frac{-1}{k_0}$ a $x \notin [\frac{-1}{k_0}, 1 + \frac{1}{k_0}]$. Tedy $x \notin D$, což je spor. Obdobně pokud $x > 1$. Dostáváme, že $D = [0,1]$ a určení suprema a infima je už triviální.

H3

a) $\{x\}, \; x \in \mathbb{R}$.

b) $[f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)] \Leftrightarrow [x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \cap B)]$.
Dokážeme výrok vpravo:

$$x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Leftrightarrow [x \in f^{-1}(A) \wedge x \in f^{-1}(B)] \Leftrightarrow [f(x) \in A \wedge f(x) \in B] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A \cap B).$$

c)
$$f^{-1}(M) = \{t, \; t \in [0,1], \; \sin(2\pi t) \in M\} = [0,1]$$
$$f^{-1}(N) = \{t, \; t \in [0,1], \; \sin(2\pi t) \in N\} = \emptyset$$
$$f^{-1}(P) = \{t, \; t \in [0,1], \; \sin(2\pi t) \in \{0\}\} = \{t, \; t \in [0,1], \; \sin(2\pi t) = 0\} = \{-1; \tfrac{-1}{2}; 0; \tfrac{1}{2}; 1\}$$
$$S = \{\tfrac{-1}{2}; \tfrac{1}{2}\}, \; f^{-1}(S) = \{t, \; t \in [0,1], \; \sin(2\pi t) = \pm\tfrac{1}{2}\} = \{\tfrac{-5}{12}; \tfrac{-1}{12}; \tfrac{1}{12}; \tfrac{5}{12}\}.$$