Výsledky z domácí úlohy z 5. cvičení

3.11.2011

.

H1

$a)\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{5n+33}}=\infty.$

Pro $K\geq 1$ zvolím $n_0:=\lceil\frac{5K^2+\sqrt{25K^2+132K-4}}{2}\rceil+1$, pro $K<1$ zvolím $n_0:=10$. Potom $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq n_0$ platí $\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{5n+33}}\geq K$.

$b)\lim_{n\to\infty}\lceil\frac{(-5)^n}{n}\rceil$ neexistuje.

Pomocí předpisu $n_k=2k,\ k\in\mathbb{N}$ vyberme z $\{\lceil\frac{(-5)^n}{n}\rceil\}_{n=1}^{\infty}$ podposloupnost $\{\lceil\frac{(-5)^{n_k}}{n_k}\rceil\}_{k=1}^{\infty}$. Potom pro každé $k\in\mathbb{N}$ platí $\lceil\frac{(-5)^{n_k}}{n_k}\rceil=\lceil\frac{(25)^k}{2k}\rceil\geq\frac{(25)^k}{2k}=:a_k$. Posloupnost $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ má kladné členy a protože $\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=25>1$, platí $\lim_{k\to\infty}a_k=\infty$ a tedy i $\lim_{k\to\infty}\lceil\frac{(-5)^{n_k}}{n_k}\rceil=\infty$.

Vybereme-li podposloupnost $\{\lceil\frac{(-5)^{n_k}}{n_k}\rceil\}_{k=1}^{\infty}\subseteq\{\lceil\frac{(-5)^n}{n}\rceil\}_{n=1}^{\infty}$ pomocí $n_k=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$, je potom $\lceil\frac{(-5)^{n_k}}{n_k}\rceil=\lceil-5\cdot\frac{(25)^k}{2k+1}\rceil\leq-5\cdot\frac{(25)^k}{2k+1}:=b_k$ pro každé $k\in\mathbb{N}$. Jelikož platí $\lim_{k\to\infty}b_k=-\infty$ (argumentace podobná jako u a_k), plyne z toho i $\lim_{k\to\infty}\lceil-5\cdot\frac{(25)^k}{2k+1}\rceil=-\infty$.

Lze tedy z posloupnosti $\{\lceil\frac{(-5)^n}{n}\rceil\}_{n=1}^{\infty}$ vybrat 2 posloupnosti, z nichž každá má limitu, ale limity se nerovnají. Limita $\{\lceil\frac{(-5)^n}{n}\rceil\}_{n=1}^{\infty}$ tedy neexistuje.

H2

$a)\lim_{n\to\infty}\sin(n^2\pi)=0$ neboť $\sin(n\pi)=0$ pro každé $n\in\mathbb{N}$ a limitou konstantní posloupnosti je ona konstanta posloupnost určující.

b)

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\frac{\sqrt{n^2+1}}{6n^2+4})=\lim_{n\to\infty}\cos(\frac{n}{n}\cdot\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{6n+\frac{4}{n}}).$$

Především

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{6n+\frac{4}{n}}\overset{VOAL}{=}\frac{\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{\lim_{n\to\infty}6n+\frac{4}{n}}\overset{Heine,Voal}{=}\frac{\sqrt{1+0}}{\infty+0}=0,$$

neboť odmocnina je spojitá v bodě 1. Protože funkce kosinus je spojitá v 0, platí

$$\lim_{n\to\infty}\cos(\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{6n+\frac{4}{n}})=\cos(\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{6n+\frac{4}{n}})=\cos 0=1.$$

c) Čitatel policajtujeme: Pro každé $n\in\mathbb{N}$ platí

$$\frac{1}{2}\leq\sqrt[n]{2^{-n}+5^{-n}+6^{-n}}\leq\sqrt[n]{3\cdot 2^{-n}}=\frac{1}{2}\sqrt[n]{3}\quad\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\quad\frac{1}{2}.$$

Jmenovatel opravíme dle vzorce

$$\sqrt{7n^2+2n}-\sqrt{7n^2+n}=\frac{n}{\sqrt{7n^2+2n}+\sqrt{7n^2+n}}=\frac{1}{\sqrt{7+\frac{2}{n}}+\sqrt{7+\frac{1}{n}}}\overset{n\to\infty,(VOAL,Heine,VOAL)}{\longrightarrow}\frac{1}{2\sqrt{7}},$$

přičemž využíváme spojitosti druhé odmocniny v bodě 7. Další použití VOAL nám dává

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{2^{-n}+5^{-n}+6^{-n}}}{\sqrt{7n^2+2n}-\sqrt{7n^2+n}}=\frac{2\sqrt{7}}{2}=\sqrt{7}.$$