Výsledky z domácí úlohy z 8. cvičení

24.11.2011

.

H1

a) Zvolme pro každé $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n = \frac{1}{n^2}$. Potom je jistě $a_n = b_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverguje a platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} \overset{VOAL}{=} \left(\frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}\right)^2 = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) \overset{VOAL}{=} 1.$$

b) Volbou $a_n = b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \overset{VOAL}{=} \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1$$

a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n}) \overset{VOAL}{=} 1.$$

Dále řada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje.

c) Volme $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \frac{1}{n^2+(-1)^n\cdot 2n}$. Ukážeme, že řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n \cdot 2n}$$

konverguje, dokonce absolutně.

Ukážeme dále, že pro libovolně zvolené $K \in \mathbb{N}$ existují $n_0 \in \mathbb{N}$ a $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_0, n_1 > K$ taková, že platí $a_{n_0+1} \leq a_{n_0}$ a $a_{n_1+1} \geq a_{n_1}$ a proto $\{a_n\}_{n=K}^{\infty}$ není monotónní. Protože K bylo zvoleno libovolně, není $\{a_n\}_{n=K}^{\infty}$ monotónní pro žádné $K \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Pro K sudé volme $n_0 = K+1$ a $n_1 = K+2$, pro K liché nechť $n_0 = K+2$ a $n_1 = K+3$. Potom platí

$$a_{n_0+1} = \frac{1}{n_0^2 + 2n_0 + 1 + 2n_0 + 2} \leq \frac{1}{n_0^2 - 2n_0} = a_{n_0}$$

a

$$a_{n_1+1} = \frac{1}{n_1^2 + 2n_1 + 1 - 2n_1 - 2} \geq \frac{1}{n_1^2 + 2n_1} = a_{n_1}.$$

Tedy monotonie je vyloučena. Co se týče konvergence výše zmíněné řady, máme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2 + (-1)^n \cdot 2n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^2 + (-1)^n \cdot 2n|}.$$

Srovnejme limitně s $\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{|n^2 + (-1)^n \cdot 2n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|1 + (-1)^n \frac{2}{n}|} \overset{Heine, Voal}{=} \frac{1}{1} = 1 \in (0, \infty).$$

Protože $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$ konverguje, konverguje absolutně řada $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$. □