Výsledky z domácí úlohy z 9. cvičení

1.12.2011

.

H1 Máme

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[3]{3x+2}-\sqrt{x+2}}{(\sqrt{5x+2}-\sqrt{6x})^2} = \lim_{x\to 2} \frac{((3x+2)^2-(x+2)^3)}{\sum_{k=0}^{5}(3x+2)^{(5-k)/3}(x+2)^{k/2}} \cdot \frac{(\sqrt{5x+2}+\sqrt{6x})^2}{(-x+2)^2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(-x^3+3x^2-4)(\sqrt{5x+2}+\sqrt{6x})^2}{(x-2)^2(\sum_{k=0}^{5}(3x+2)^{(5-k)/3}(x+2)^{k/2})} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x+1)(\sqrt{5x+2}+\sqrt{6x})^2}{\sum_{k=0}^{5}(3x+2)^{(5-k)/3}(x+2)^{k/2})} = \frac{-144}{192} = \frac{-3}{4}.$$

H2

a) Využijeme faktu, že existuje (prstencové) okolí bodu 0, na kterém je funkce $f(x) = x\log 2$ nenulová a počítáme

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x\log 2}-1}{x\log 2}\log 2 \overset{VoLSF}{\underset{VOAL}{=}} \log 2.$$

b) Protože pro každé $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ platí $\sqrt{1+x^2} \neq 1$, je celý následující výpočet korektní:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\sqrt{1+x^2})}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\log(\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}-1} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} \overset{VoLSF}{\underset{VOAL}{=}} 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1}{2}.$$

H3 Jelikož je pro každé $n \in \mathbb{N}$ výraz $(\cos\frac{1}{\sqrt{n}} - 1)$ záporný, vyšetříme konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}).$$

Srovnejme limitně s $1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \overset{Heine}{=} \frac{1}{2}.$$

Heineho věta lze využít, protože $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí $\frac{1}{\sqrt{n}} \neq 0$. Jelikož $\frac{1}{2} \in (0,\infty)$ a řada $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje, diverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}})$, ergo i řada $\sum_{n=1}^{\infty}(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}-1)$.