Návody a výsledky k příkladům z 2. testu

22.12.2011

Upozornění: Vše, co je zde napsáno, je třeba brát nikoliv jako správné řešení příkladů z písemky, ale jako pouhé návody k řešení, kterým (záměrně) velmi často chybí jakákoliv odůvodnění a vysvětlení, proč například uvedené rovnosti platí. **Nelze** je proto považovat za řešení.

1. Mějme funkci $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$. Spočtěte z definice $f'(x)$, tj. derivaci f v bodě x, $x > -1$.
   Výsledek: $f'(x) = \frac{-1}{2(x+1)\sqrt{x+1}}$.

2. Spočtěte následující limitu a postup odůvodněte.

$$\lim_{x\to 0}(1 + \tan x)^{\frac{x}{\cos x - 1}} = e^{-2}$$

   Výsledek: Spočítáme především (uvědomte si proč a co přitom používáte za věty!)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\cos x - 1} \log(1 + \tan x) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\cos x - 1} \frac{1}{x} \frac{\log(1 + \tan x)}{\tan x} \tan x = -2 \cdot 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = -2$$

3. Spočtěte následující limitu a postup odůvodněte.

   Výsledek: Buďto jeden l'Hospital (a pak už stačí dosadit) a nebo

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^3 - 2} - \sqrt{x^2 + 5x + 1}}{4x^2 + x - 39} = \lim_{x\to 3} \frac{x^3 - x^2 - 5x - 3}{(4x^2 + x - 39)(\sqrt{x^3 - 2} + \sqrt{x^2 + 5x + 1})}$$

   a protože polynom v čitateli i ve jmenovateli mají za kořen trojku (po dosazení přeci vychází nula lomeno nulou), lze je oba vydělit výrazem $(x - 3)$ a dostáváme

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 2x + 1}{(4x + 13)(\sqrt{x^3 - 2} + \sqrt{x^2 + 5x + 1})} = \frac{8}{125} = (\frac{2}{5})^3$$

4. Spočtěte následující limitu a postup odůvodněte.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x + \sin x^2}{x^3} = \infty$$

   Výsledek: Předně (protože tušíme, že vyjde nekonečno) odhadneme

$$\forall x \in (0, \infty) : \quad \frac{e^x + \sin x^2}{x^3} \geq \frac{e^x - 1}{x^3},$$

   a pak už přes tři l'Hospitaly

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{x^3} = ... = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{6} = \infty$$

   a strážnící dávají výsledek.

5. Vyšetřete konvergenci řady.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\cos n)(\sin \frac{1}{n^2})$$

Výsledek: Protože tušíme řadu silnou jako $\frac{1}{n^2}$, čehož řada konverguje absolutně, vyšetříme absolutní konvergenci. Máme dvě možnosti. Buďto ($\frac{1}{n^2}$ leží v prvním kvadrantu pro přirozená n)

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad |(\cos n)(\sin \frac{1}{n^2})| \leq 1 \cdot \sin \frac{1}{n^2},$$

což přes LSK s $\frac{1}{n^2}$ vyjde krásně 1 nebo lze rovnou limitně srovnat s $\frac{1}{n\sqrt{n}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(\cos n)(\sin \frac{1}{n^2})|}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|(\cos n)|}{\sqrt{n}} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = 0 \cdot 1 = 0$$

a z obou případů je konvergence ihned vidět.