Cvičení z matematické analýzy I

Matěj Novotný

6.10.2011

Úlohy na cvičení

G1 Dokažte pomocí matematické indukce:

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

c) $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x > -1$ platí $(1+x)^n \geq (1+nx)$

d) $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

G2 Znegujte následující výroky a rozhodněte o jejich platnosti.

a) $\forall x, z \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: \ (x+z)^n \leq 0$

b) $\exists x, z \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: \ (x^2+z)^3 \geq \frac{n^2}{x+1}$

c) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0\ \exists \delta \in \mathbb{R}, \delta > 0\ \forall x \in \mathbb{R}: \ (0 < |x-1| < \delta) \Rightarrow (0 \leq |x| \leq \varepsilon)$.

G3 Reálná čísla. Řekneme, že množina $M \subseteq \mathbb{R}$ je omezená zdola, pokud existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že platí $x \geq c,\ x \in M$. Obdobně definujeme omezenost množiny shora. Množina $M \subseteq \mathbb{R}$ se zove omezená, je-li omezená zdola i shora. Dokažte či vyvraťte následující tvrzení:

a) Množina $U \subseteq \mathbb{R}$ je omezená tehdy a jen tehdy, platí-li $\exists w \in \mathbb{N}\ \forall z \in M: \ (|z| < w)$.

b) Je-li $D \subseteq \mathbb{R}$ omezená, potom je $E := \{x^2,\ x \in D\}$ taktéž omezená.

c) Není-li $H \subseteq \mathbb{R}$ omezená, pak existuje $H_1 \subseteq H$ omezená a $H_2 \subset H$, $H_2 \neq H$ neomezená.

d) Existuje pouze konečně mnoho množin $M_1, M_2, ..., M_k,\ k \in \mathbb{N},\ M_i \subseteq \mathbb{N},\ i \in \{1, 2, ..., k\}$, které jsou neomezené.

Úlohy na doma

H1 Dokažte.

a) $\forall n \in \mathbb{N}$ platí $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ je číslo $\frac{n}{6} + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3}$ přirozené.

c) $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4$ platí $2^n \geq n^2$.

H2 Nalezněte maximální definiční obory funkcí. Pod značením $\log x$ rozumějte přirozený logaritmus, tj. $\ln x$.

a) $\sqrt{\cos x}$

b) $\log(\log(x^2 + 3x - 40))$

c) $\frac{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}{\log(\sin x \cos x)}$.

H3 Znegujte výrok $\exists A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset\ \forall x \notin A\ \forall y \in A\ \exists K \in \mathbb{Z}: \ (x^K + y^{-K} \leq x + y \leq x^2 + y^2)$.