# Cvičení z matematické analýzy I

Matěj Novotný

13.10.2011

## Úlohy na cvičení

**G1** Nechť $A, B, C$ jsou množiny, $A \subseteq \mathbb{R}$, $y, z \in \mathbb{R}$. Vyjádřete ekvivalentně (pomocí kvantifikátorů) výroky:

a) $(A \neq \emptyset)$; $(A \subseteq B)$; $(A \neq B)$; $(A \cap B = \emptyset)$; $(A \cup B = C)$;

b) $(\sup A = y)$; $(\inf A = z)$.

**G2** Najděte suprema a infima následujících množin:

a) $(1,2) \cup \{1; \frac{3}{2}\}$ b) $\{\frac{5}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$

c) $\{2^{-n},\ n \in \mathbb{N}\}$ d) $\{\sin \frac{\pi}{4n},\ n \in \mathbb{N}\}$

e) $\{\frac{p}{p+q},\ p, q \in \mathbb{N}\}$ f) $\{\frac{p+1}{2p+q},\ p, q \in \mathbb{N}\}$.

**G3** Operace s množinami.

a) Nechť $f : X \to Y$ a nechť $A, B \subseteq Y$. Dokažte, že platí $f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cup B)$ a také $f^{-1}(A) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(A \setminus B)$.

b) Buďte $A, B, X$ množiny. Dokažte, že platí tzv. de Morganova pravidla: $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$, $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

c) Buďte $A, B$ množiny. Symetrickým rozdílem množin $A, B$ rozumíme množinu $A \triangle B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. Dokažte, že $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = B \triangle A$.

d) Nechť pro $A, B \subseteq \mathbb{R}$ existují $\sup A = S_A$, $\inf A = I_A$, $\sup B = S_B$ a $\inf B = I_B$. Co lze říci o supremech a infimech množin $A \cup B$, $A \cap B$, $A + B := \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$, $A \setminus B$?

## Úlohy na doma

**H1** Určete definiční obor $D(f)$ (pokud není již zadán), obor funkčních hodnot $H(f)$ a pokud lze, nalezněte inverzní funkci $f^{-1}$, je-li $f$ zadána následovně:

a) $f(x) = \log(\frac{1-x}{1+x})$. Uvažujte přirozený logaritmus, tj. o základu $e$.

b) $f(t) = at + (1-t)b$, $t \in [0,1]$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

**H2** Najděte suprema a infima následujících množin (a dokažte, že se nemýlíte!):

a) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\{3 - \frac{2}{n}\}$ b) $(-1,1)$ c) $\{\cos(\pi - \frac{\pi}{n}),\ n \in \mathbb{N}\}$ d) $\bigcap_{k \in \mathbb{N}}[-\frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}]$.

**H3** Práce s množinami.

a) Nalezněte množinu $A \subseteq \mathbb{R}$, pro kterou platí $\sup A \leq \inf A$.

b) Nechť $f : X \to Y$ a nechť $A, B \subseteq Y$. Dokažte, že platí $f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) = f^{-1}(A \cap B)$.

c) Nechť $f(t) = \sin(2\pi t)$, $t \in [-1,1]$ a nechť $M = [-1,1]$, $N = \mathbb{Z} \setminus \{-1; 0; 1\}$, $P = \{0\}$, $S = \{x \in \mathbb{R},\ x \neq 0,\ \cos(4\pi x) = 1\} \cap (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Nalezněte vzory těchto množin při zobrazení $f$, tj. najděte množiny $f^{-1}(M)$, $f^{-1}(N)$, $f^{-1}(P)$, $f^{-1}(S)$.