Cvičení z matematické analýzy I

Matěj Novotný

27.10.2011

Úlohy na cvičení

G1 Zjistěte, jestli existují vlastní, případně nevlastní limity a dokažte to (z definice, pomocí věty z přednášky...).

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}\qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\cos n\pi\qquad c)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{K},\ K>0\qquad d)\ \lim_{n\to\infty}q^n,\quad q\in\mathbb{R}.$$

G2 Spočtěte limity a odůvodněte správnost svých výpočtů.

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+5)!}{n^n}\qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{4^n-20n^n-(n+2)!}{3n^n-6}\qquad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+...+a^n}{1+b+b^2...+b^n}\quad |a|<1,|b|<1$$

$$d)\ \leftarrow\ pro\ a,b\in\mathbb{R},\ 1<|a|<|b|\qquad e)\ \lim_{n\to\infty}\frac{(n+13)^{50}-(n-2)^{50}}{3^{50}(n+1)^{50}-(3n+1)^{50}}$$

G3 Spočtěte limity a odůvodněte, kde je třeba využít spojitosti vnější funkce (a dalších již známých tvrzení).

$$a)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2-n+1})\qquad b)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1})\qquad c)\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{3n^2+2^n+7^n}$$

$$d)\ \lim_{n\to\infty}[\log(n^3+2n)-\log(1+2+...+n)-\log n]\qquad e)\ \lim_{n\to\infty}n(\sqrt{n^2-1}-\sqrt[3]{n^3+1})$$

Úlohy na doma

H1 Spočtěte z definice nebo dokažte neexistenci limity.

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\log(n^2-5)\qquad b)\ \lim_{n\to\infty}\cos^2(\frac{n\pi}{2})$$

H2 Spočtěte limitu a odůvodněte správnost výpočtu.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+6n+1}-\sqrt[3]{n^3-3}}{\sqrt{2n^4-n^3+n}-\sqrt{2n^4-n^3-6n}}.$$

H3 Najděte (a ukažte správnost své domněnky) reálné posloupnosti a_n, b_n, pro které existují $(\lim_{n\to\infty}a_n)\in\mathbb{R}^*$, $(\lim_{n\to\infty}b_n)\in\mathbb{R}$, $(\lim_{n\to\infty}a_n+b_n)\in\mathbb{R}^*$ a $(\lim_{n\to\infty}a_n-b_n)\in\mathbb{R}^*$, pro něž však neexistuje limita posloupnosti a_nb_n.