

Cvičení z matematické analýzy I

Matěj Novotný

3.11.2011

Úlohy na cvičení

G1 Spočtete limity a odůvodněte, kde je třeba.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{8n^2} - \sqrt[3]{8n^2 + n}) \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad a_1 = 10, \quad a_{n+1} = 6 - \frac{5}{a_n} \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{16n^5 + 3n^4 + n^2 + 3^{-n}}.$$
$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}$$

Úlohy na samostatné počítání

G2 Spočtete z definice či dokažte neexistenci limit.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+5}{2n} \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 - n \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n}{2^n} \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n}} \quad e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{n^2\pi}{8}\right)$$
$$f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^2.$$

G3 Spočtete limity a odůvodněte na místech, kde používáte nějakou větu či odhad.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + 4n + 10}}{\pi n^{3/2} - 5} \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + n^2}{(n - 20)!} \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{n!} \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(3n - 55)^{n-1}}$$
$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2)!}{2n^{2n}(2n)!} \quad f) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 4 + 8 + 12 + \dots + 4n - 4 - 32 - 108 - \dots - 4n^3}{n^3} \quad g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - 4^n}{\left(\frac{n}{7}\right)^{n/7}}.$$

G4 Spočtete limity a odůvodněte, kde je třeba.

$$z) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{5n^2 - 1} - \sqrt{5(n+1)^2} \quad a) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^2 - 1})\sqrt[3]{n}((n+1)^2 - (n+2)^2)$$
$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n^6 + 6n^4 + 3n^3} - \sqrt{2(n^2 + 1)^3} \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^2 + 2^n + 7^n} \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^{51} + n^4 + 2}$$
$$e) \lim_{n \rightarrow \infty} [\log(n^3 + 2n) - \log(1 + 2 + \dots + n) - \log n] \quad f) \lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2 - 1} - \sqrt[3]{n^3 + 1})$$
$$g) \lim_{n \rightarrow \infty} \tan\left(\frac{\pi}{6} + \frac{100^n}{(n-100)!}\right) \quad h) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \quad a_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}}_n.$$

G5 Další limity. Nezapomeňte vždy odůvodnit svůj postup.

$$A) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \quad B) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(n+1)}{\log n^3} \quad C) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt[2]{n} - \sqrt[7]{n}} \quad D) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(2[\sqrt{n}])^n + 1}}{\sqrt[n]{n}}$$

Výsledky

G2

a) $\frac{1}{2}$, b), c), d) ∞ , e) neexistuje, f) 1.

G3

a) $\frac{1}{\pi}$, b), c), d) 0, e) ∞ , f) -2 , g) 0.

G4

z) $\frac{-10}{2\sqrt{5}}$, a) $\frac{-8}{3}$, b) $\frac{3}{4}\sqrt{2}$, c) 7, d) 1, e) $\log 2$, f) $\frac{-1}{2}$, g) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, h) 2.

G5

A) ∞ , B) $\frac{1}{3}$, C) 0, D) 2.

Úlohy na doma

H1 Spočítejte z definice nebo dokažte neexistenci.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{5n + 33}} \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\lceil \frac{(-5)^n}{n} \right\rceil$$

H2 Spočítejte limity a odůvodněte korektnost výpočtu.

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(n^2\pi) \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\sqrt{n^2 + 1}}{6n^2 + 4}\right) \quad c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^{-n} + 5^{-n} + 6^{-n}}}{\sqrt{7n^2 + 2n} - \sqrt{7n^2 + n}}$$