

Cvičení z matematické analýzy I

Matěj Novotný

10.11.2011

Úlohy na cvičení

G1 Vyšetřete konvergenci následujících řad.

$$\begin{aligned} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + \cos n}{\sqrt{n^7} + 7n^3} \quad & b) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[3]{8n^3 + 1} - \sqrt[3]{8n^3 + n} \quad & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{2^n + 3^n} \quad & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{12n}}{3^{n^2}} \\ e) \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \quad & f) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3 + \sin(3n)}{5 + \sin(3n)}\right)^n \quad & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \end{aligned}$$

Příklady na samostatné počítání

G2 Vyšetřete konvergenci.

$$\begin{aligned} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3n}{2n + n^2} \quad & b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{\sqrt[3]{n^7} + 1} \quad & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{6^n + 2n} \quad & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \quad & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} - n}{\sqrt[3]{n}} \\ f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \dots + 2n}{(\sqrt{2})^n} \quad & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 + (-1)^n + \sin n}{n^2} \quad & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{\lceil \frac{n}{3} \rceil!} \quad & i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\log(n!)} \end{aligned}$$

G3 Pro která $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ následující řady konvergují? Někde lze použít i kondenzačního kritéria.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + n}{n^\alpha} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n(\log n^\alpha)^\beta} \quad e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n^\alpha)}}{n^\beta}$$

Úlohy na doma

H1 Vyšetřete konvergenci následujících řad.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n^n} \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 + \sin \sqrt{n}}{n^2} \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^{2n}}{(n^2)!} \quad d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos(9n)}{7 + \cos(9n)}\right)^{n/3}.$$

H2 Pro která $x \in \mathbb{R}$ následující řada konverguje? Spočítejte a odůvodněte.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x - 10)^n}{4^n + 6^n}$$

Výsledky

D=diverguje, K=konverguje, S-srovnávací kritérium, LS-limitní srovnávací, KDZ- kondenzační kritérium.

G2

a)D; LS $\frac{1}{n}$, b)K; LS $\frac{1}{n^{4/3}}$, c)K; S $(\frac{1}{2})^n$, d)K; D'alembert, e)K; LS $\frac{1}{n^{4/3}}$, f)K; Cauchy nebo D'alembert, g)K; LS např. $\frac{1}{n^{3/2}}$, h)K; S $\frac{4^n}{|\frac{2}{3}|^n}$, pak D'alembert, i)D; S $\frac{1}{\sqrt{n} \log n}$, pak KDZ.

G3

a) $x \in (-5, 5)$, [geometrická řada], b) $\alpha \in (2, \infty)$, [KDZ], c) $x \in \mathbb{R}$ [D'alembert], d) $\beta \in (1, \infty)$, $\alpha \neq 0$ [KDZ].